BAB III

PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas mengenai kajian utama dalam tugas akhir ini, yaitu graf-graf yang termasuk dalam graf *analytic mean*. Adapun graf-graf yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah graf bintang dan graf bistar yang dioperasikan dengan operasi graf bayangan.

Di bawah ini akan dijelaskan kembali definisi dari pelabelan *analytic mean* dan graf *analytic mean*.

Definisi 3.1 Pelabelan *analytic mean* [11] : Suatu fungsi f dikatakan pelabelan *analytic mean* jika mungkin untuk melabeli setiap titik v di V dengan label yang berbeda dari $0,1,2,\ldots,p-1$ sedemikian sehingga jika $e=uv$ dilabeli dengan pelabelan sisi $f^*(e=uv)=\frac{|[f(u)]^2-[f(v)]^2|}{2}$ jika $|[f(u)]^2-[f(v)]^2|$ adalah genap dan $f^*(e=uv)=\frac{|[f(u)]^2-[f(v)]^2|+1}{2}$ jika $|[f(u)]^2-[f(v)]^2|$ adalah ganjil, maka tidak ada dua sisi berbeda yang memiliki label yang sama.

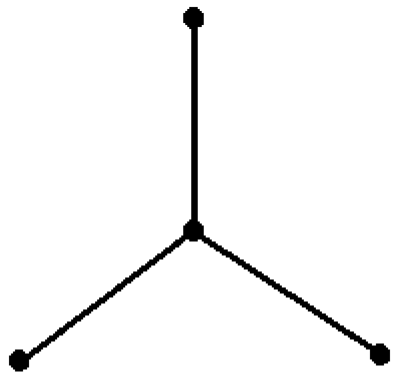
Definisi 3.2 Graf *analytic mean* [11] : Graf G dikatakan sebagai graf *analytic mean* jika G dapat dilabeli dengan pelabelan *analytic mean*.

Berikut ini akan dijelaskan mengenai proses untuk mengoprasikan graf bintang $K_{1,n}$ dan graf bistar $B_{n,n}$ dengan operasi graf bayangan.

3.1 Operasi Graf Bayangan pada Graf Bintang $K_{1,n}$ dan Graf Bistar $B_{n,n}$

3.1.1 Graf Bayangan dari Graf Bintang $K_{1,n}$

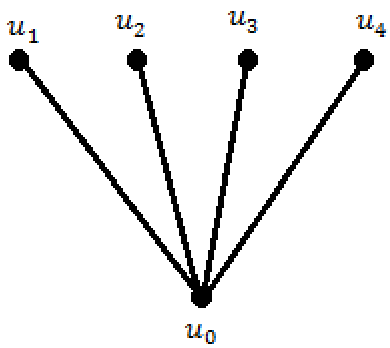
Graf pertama yang akan dioperasikan dengan operasi graf bayangan adalah graf bintang $K_{1,n}$. Graf bintang $K_{1,n}$ adalah graf bipartit lengkap $K_{1,n}$ dengan $n+1$ titik dan n sisi. Perhatikanlah graf bintang $K_{1,3}$ di bawah ini.



Gambar 3.1 Graf bintang $K_{1,3}$.

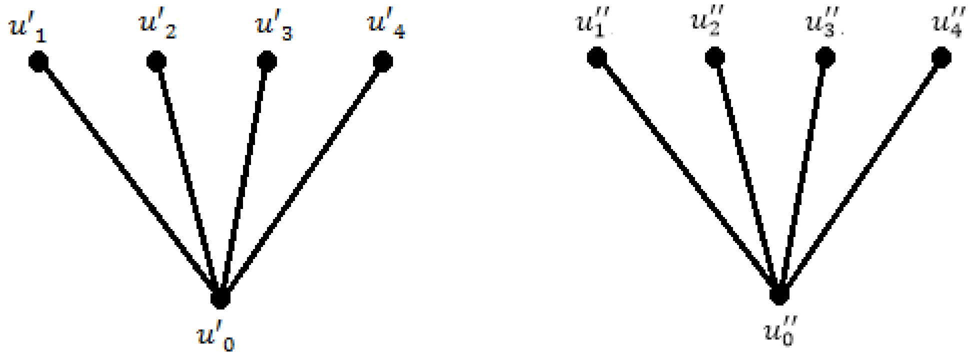
Untuk membentuk suatu graf bayangan dari graf bintang $K_{1,n}$, langkah pertama yang harus dilakukan adalah membuat dua salinan dari graf bintang $K_{1,n}$, misalkan $K'_{1,n}$ dan $K"_{1,n}$ dimana untuk setiap titik $u_i \in K_{1,n}$, maka dinotasikan u'_i sebagai titik di $K'_{1,n}$ dan $u"_i$ sebagai titik di $K"_{1,n}$ yang berpadanan dengan u_i. Setelah itu hubungkan setiap titik u'_i di $K'_{1,n}$ dengan titik yang bertetangga dengan $u"_i$ di $K"_{1,n}$. Untuk lebih memahami mengenai operasi graf bayangan pada graf bintang $K_{1,n}$, perhatikanlah contoh berikut:

Contoh 3.1 : Misalkan graf bintang $K_{1,4}$ adalah graf yang akan dioperasikan dengan operasi graf bayangan. Misalkan $\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ adalah himpunan titik di $K_{1,4}$ dimana titik u_0 adalah titik dengan derajat empat, sedangkan u_1, u_2,u_3, u_4 adalah titik-titik berderajat satu. Maka graf $K_{1,4}$ dapat ditunjukkan seperti Gambar 3.2 di bawah ini.



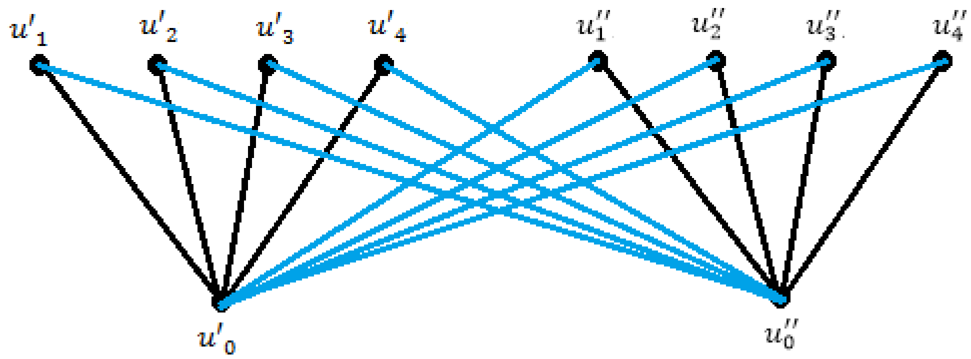
Gambar 3.2 Graf bintang $K_{1,4}$.

Selanjutnya, buatlah dua buah salinan dari graf bintang $K_{1,4}$, misalkan $K'_{1,4}$ dan $K"_{1,4}$. Maka untuk setiap $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 \in K_{1,4}$, dinotasikan $u_0', u_1', u_2', u_3', u_4'$ sebagai titik di $K'_{1,4}$ dan $u_0'', u_1'', u_2'', u_3'', u_4''$ sebagai titik di $K"_{1,4}$ yang berturut-turut berpadanan dengan u_0, u_1, u_2, u_3, u_4. Sehingga himpunan titik di $K'_{1,4}$ adalah $\{u_0', u_1', u_2', u_3', u_4'\}$ dan himpunan titik di $K"_{1,4}$ adalah $\{u_0'', u_1'', u_2'', u_3'', u_4''\}$. Maka akan diperoleh graf seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.3 di bawah ini.



Gambar 3.3 Graf bintang $K'_{1,4} \cup K"_{1,4}$.

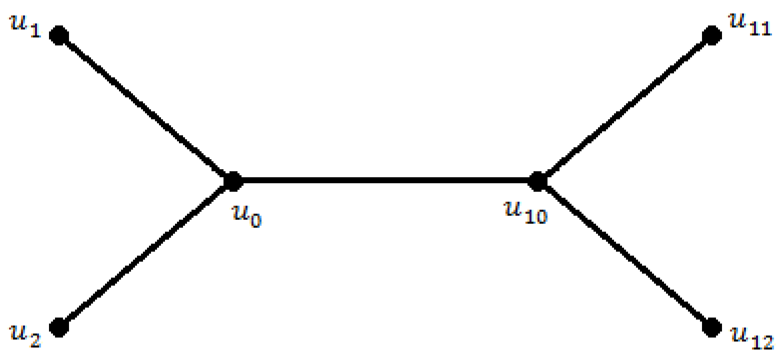
Selanjutnya, hubungkanlah setiap titik $u_i' \in K'_{1,4}$ pada tetangga dari titik $u_i'' \in K"_{1,4}$ yang berpadanan dengan u_i'. Dalam hal ini berarti titik u_1', u_2', u_3' dan titik u_4' di graf bintang $K'_{1,4}$ dihubungkan dengan titik u_0'' di graf bintang $K"_{1,4}$ dan titik u_0' di graf bintang $K'_{1,4}$ dihubungkan dengan titik $u_1'', u_2'', u_3'', u_4''$ di graf bintang $K"_{1,4}$, sehingga diperoleh graf seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.4 di bawah ini.



Gambar 3.4 Graf bayangan dari graf bintang $K_{1,4}$.

3.1.2 Graf Bayangan dari Graf Bistar $B_{n,n}$

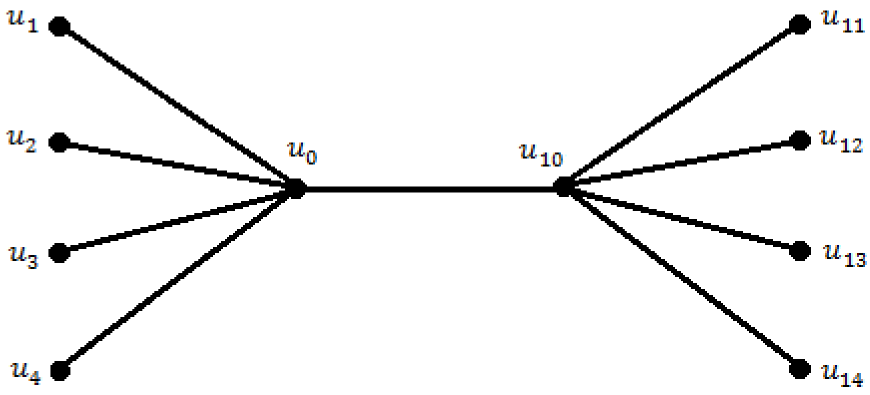
Graf kedua yang akan dioperasikan dengan operasi graf bayangan adalah graf bistar $B_{n,n}$. Graf bistar $B_{n,n}$ adalah suatu graf yang diperoleh dengan menggabungkan titik-titik dengan derajat tertinggi dari dua buah salinan graf bintang $K_{1,n}$ dengan sebuah sisi, dimana untuk setiap titik $u_i \in K_{1,n}$, maka dinotasikan u_{1i} sebagai titik di salinan graf $K_{1,n}$ misalkan $K'_{1,n}$, yang berpadanan dengan u_i. Perhatikanlah contoh graf bistar di bawah ini:



Gambar 3.5 Graf bistar $B_{2,2}$.

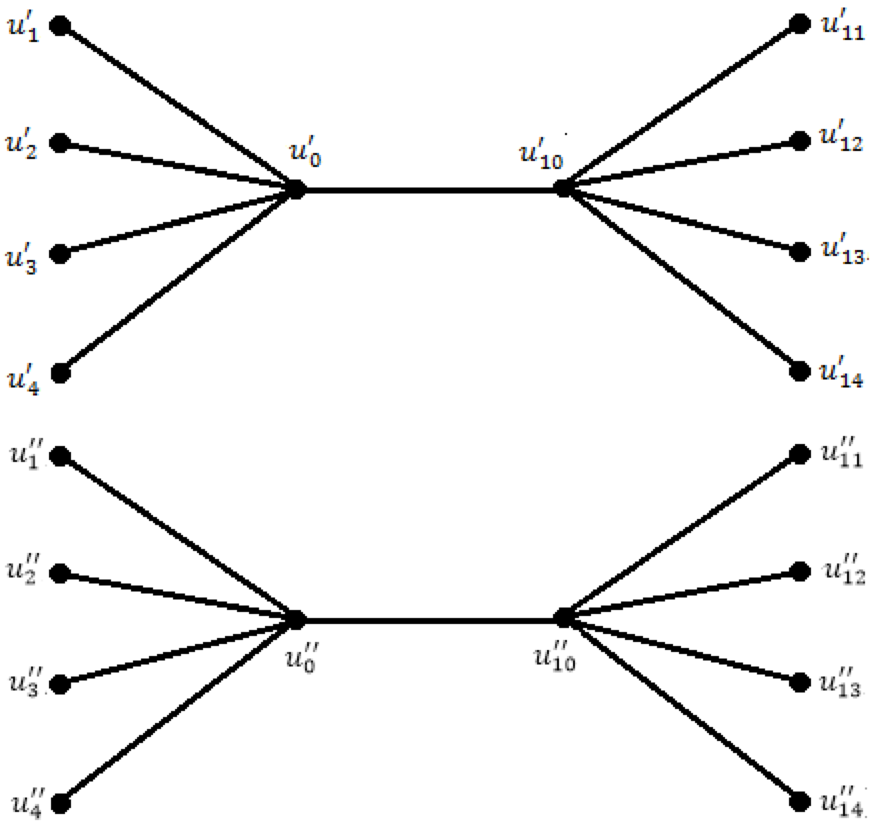
Untuk membentuk suatu graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$, langkah pertama yang harus dilakukan adalah membuat dua buah salinan dari graf bistar $B_{n,n}$, misalkan $B'_{n,n}$ dan $B"_{n,n}$ dimana untuk setiap titik $u_i \in B_{n,n}$, maka dinotasikan u_i' sebagai titik di $B'_{n,n}$ dan u_i'' sebagai titik di $B"_{n,n}$ yang berpadanan dengan u_i. Setelah itu hubungkan setiap titik u_i' di $B'_{n,n}$ dengan titik yang bertetangga dengan u_i'' di $B"_{n,n}$. Untuk lebih jelasnya perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.2 : Misalkan graf bistar $B_{4,4}$ adalah graf yang akan dioperasikan dengan operasi graf bayangan. Misalkan $\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}\}$ adalah himpunan titik di graf bistar $B_{4,4}$, dimana u_0 dan u_{10} adalah titik dengan derajat empat, sedangkan $u_1, u_2, u_3, u_4, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}$ adalah titik-titik dengan derajat satu. Maka graf bistar $B_{4,4}$ dapat ditunjukkan seperti Gambar 3.6 berikut.



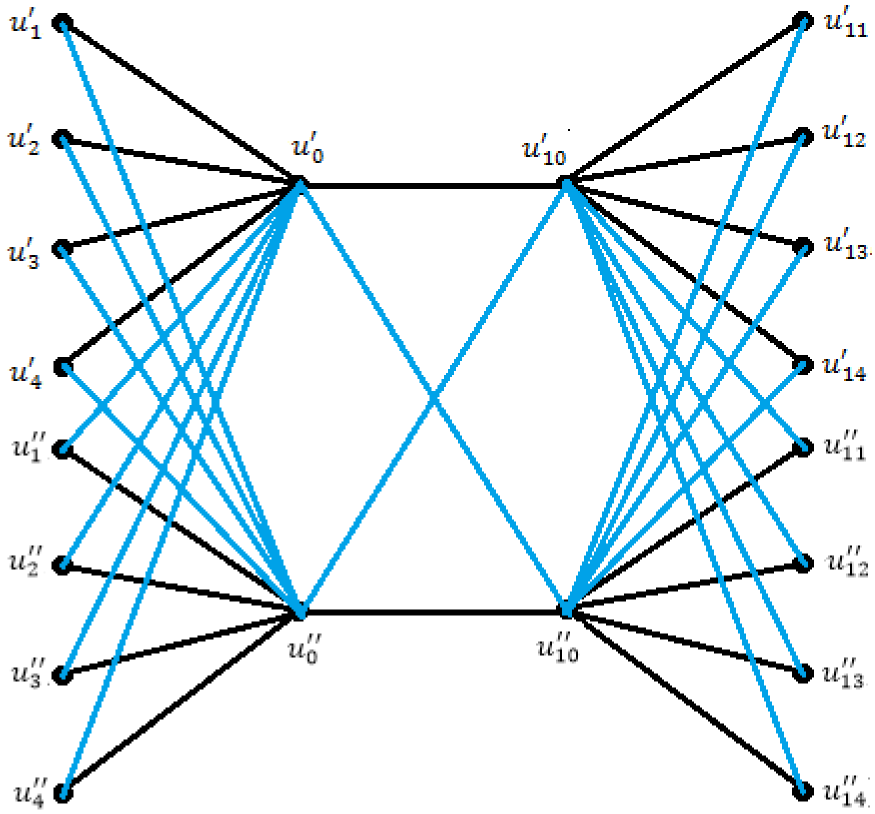
Gambar 3.6 Graf bistar $B_{4,4}$.

Selanjutnya buatlah dua buah salinan dari graf bistar $B_{4,4}$, misalkan $B'_{4,4}$ dan $B"_{4,4}$. Maka untuk setiap $u_i \in B_{4,4}$, dinotasikan u'_i sebagai titik di $B'_{4,4}$ dan u''_i sebagai titik di $B"_{4,4}$ yang berpadanan dengan u_i untuk $0 \leq i \leq 4$. Sehingga himpunan titik di $B'_{4,4}$ adalah $\{u'_0, u'_1, u'_2, u'_3, u'_4, u'_{10}, u'_{11}, u'_{12}, u'_{13}, u'_{14}\}$ dan himpunan titik di $B"_{4,4}$ adalah $\{u''_0, u''_1, u''_2, u''_3, u''_4, u''_{10}, u''_{11}, u''_{12}, u''_{13}, u''_{14}\}$. Maka akan diperoleh graf seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 3.7 di bawah ini.



Gambar 3.7 Graf bistar $B'_{4,4} \cup B"_{4,4}$.

Selanjutnya, hubungkanlah setiap titik $u_i' \in B'_{4,4}$ pada tetangga dari titik $u''_i \in B''_{4,4}$ yang berpadanan dengan u_i'. Dalam hal ini berarti titik u_1', u_2', u_3', u_4' di graf $B'_{4,4}$ dihubungkan pada titik u_0'' di graf $B''_{4,4}$, titik u_0' di graf $B'_{4,4}$ dihubungkan pada titik $u_1'', u_2'', u_3'', u_4''$ dan u_{10}'' di graf $B''_{4,4}$, titik u_{10}' dihubungkan pada titik $u_{11}'', u_{12}'', u_{13}'', u_{14}''$ dan u_0'' di graf $B''_{4,4}$ dan titik $u_{11}', u_{12}', u_{13}', u_{14}'$ dihubungkan pada titik u_{10}'' di graf $B''_{4,4}$, sehingga diperoleh graf bayangan dari graf bistar $B_{4,4}$ seperti yang ditunjukkan Gambar 3.8 di bawah ini.



Gambar 3.8 Graf bayangan dari graf bistar $B_{4,4}$.

3.2 Pelabelan *Analytic Mean* pada Graf Bayangan dari Graf Bintang $K_{1,n}$ dan Graf Bayangan dari Graf Bistar $B_{n,n}$.

Di bawah ini akan dibuktikan bahwa graf bayangan dari graf bintang $K_{1,n}$ dan graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$ adalah graf *analytic mean*.

3.2.1 Pelabelan *Analytic Mean* pada Graf Bayangan dari Graf Bintang $K_{1,n}$

Teorema 3.1: Graf bayangan dari graf bintang $K_{1,n}$ adalah suatu graf *analytic mean*, untuk $n > 0$.

Bukti : Untuk membuktikan bahwa graf bayangan dari graf bintang $K_{1,n}$ adalah suatu graf *analytic mean*, maka harus ditunjukkan bahwa graf bayangan dari graf bintang $K_{1,n}$ dapat dilabeli dengan pelabelan *analytic mean*, yaitu paling sedikit terdapat satu fungsi pelabelan titik f dari himpunan titik graf bayangan dari graf bintang $K_{1,n}$ ke himpunan elemen yang berbeda dari $0,1,2,\dots p-1$, dimana p adalah banyaknya titik di graf bayangan dari graf bintang $K_{1,n}$ sedemikian sehingga dapat didefinisikan suatu pelabelan sisi f^* yang bergantung pada f, yaitu $f^*(e = uv) = \frac{|(f(u))^2-(f(v))^2|}{2}$ jika $|(f(u))^2 - (f(v))^2|$ adalah bilangan genap dan $f^*(e = uv) = \frac{|(f(u))^2-(f(v))^2|+1}{2}$ jika $|(f(u))^2 - (f(v))^2|$ adalah bilangan ganjil, dimana tidak ada dua sisi berbeda yang mendapat label yang sama.

Misalkan himpunan titik pada graf bayangan dari graf bintang $K_{1,n}$ adalah sebagai berikut:

$$V\left(D_2(K_{1,n})\right) = \{u_0', u_i', u_0'', u_i'' : 1 \leq i \leq n\},$$

Diketahui bahwa $p = \left|V\left(D_2(K_{1,n})\right)\right| = 2n + 2$.

Misalkan himpunan sisi pada graf bayangan dari graf bintang $K_{1,n}$ adalah sebagai berikut:

$$E\left(D_2(K_{1,n})\right) = \{u_i'u_0', u_i''u_0', u_i'u_0'', u_i''u_0'' : 1 \leq i \leq n\}$$

Didefinisikan pelabelan titik $f : V\left(D_2(K_{1,n})\right) \longrightarrow \{0,1,2 \dots, 2n+1\}$ dengan ,

$$f(u_i') = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ 1, & i = 1 \\ i+1, & 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f(u_i'') = \begin{cases} 2, & i = 0 \\ n+i+1, & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Misalkan f^* adalah pelabelan sisi yang bergantung pada f, dimana f^* didefinisikan dengan,

$$f^*(e = uv) = \begin{cases} \frac{|(f(u))^2-(f(v))^2|}{2} & ;\text{jika } |(f(u))^2-(f(v))^2| \text{adalah genap} \\ \frac{|(f(u))^2-(f(v))^2|+1}{2} & ;\text{jika} |(f(u))^2-(f(v))^2| \text{adalah ganjil} \end{cases}$$

Maka,

Kasus 1. Untuk n ganjil, misalkan $n = 2l + 1$ untuk l suatu bilangan bulat, diperoleh label pada sisi-sisi di graf bayangan pada bintang $K_{1,n}$ berdasarkan definisi f^* sebagai berikut:

1. Untuk sisi $e = u_1'u_0'$,

   $|(f(u_1'))^2 - (f(u_0'))^2| = |(1)^2 - (0)^2| = |1 - 0| = 1$

   Karena $|(f(u_1'))^2 - (f(u_0))^2| = 1$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

   $$f^*(u_1'u_0') = \frac{|(f(u_1'))^2 - (f(u_0'))^2| + 1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

   $\therefore f^*(u_1'u_0') = 1$

2. Untuk sisi $e = u_i'u_0'$,

   $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| = |(i+1)^2 - (0)^2| = |i^2 + 2i + 1 - 0|$

   $= i^2 + 2i + 1$

   Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat, maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| = (2k)^2 + 2(2k) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ adalah suatu bilangan ganjil, maka pelabelan sisinya:

   $$f^*(u_i'u_0') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| + 1}{2} = \frac{i^2 + 2i + 1 + 1}{2}$$

   $$= \frac{i^2 + 2i + 2}{2}.$$

   Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat, maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| = (2k+1)^2 + 2(2k+1) + 1 = 4k^2 + 8k + 6 = 2(2k^2 + 4k + 3)$ adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

   $$f^*(u_i'u_0') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2|}{2} = \frac{i^2 + 2i + 1}{2}$$

   $$\therefore f^*(u_i'u_0') = \begin{cases} \frac{i^2 + 2i + 2}{2}, \text{jika } i \text{ genap} ; 2 \le i \le n \\ \frac{i^2 + 2i + 1}{2}, \text{jika } i \text{ ganjil} ;\ 2 \le i \le n \end{cases}$$

3. Untuk sisi $e = u_i'' u_0'$,

$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2| = |(n + i + 1)^2 - (0)^2| = |(n + i + 1)^2 - 0|$

$= n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 1$

Jika$i$ genap, misalkan $i = 2k$ untuk $k$suatu bilangan bulat, maka:

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2|$$
$$= (2l + 1)^2 + (2k)^2 + 2(2l + 1)(2k) + 2(2l + 1)$$
$$+ 2(2k) + 1 = 2(2l^2 + 2k^2 + 4l + 4k + 4lk + 2)$$

adalah suatu bilangan genap, maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i'' u_0') = \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2|}{2} = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 1}{2}$$

Jika$i$ ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat, maka:

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2|$$
$$= (2l + 1)^2 + (2k + 1)^2 + 2(2l + 1)(2k + 1)$$
$$+ 2(2l + 1) + 2(2k + 1) + 1$$
$$= 4l^2 + 4k^2 + 8lk + 12l + 12k + 9$$
$$= 2(2l^2 + 2k^2 + 4lk + 6l + 6k + 4) + 1$$

adalah suatu bilangan ganjil, maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i'' u_0') = \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2| + 1}{2}$$
$$= \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 1 + 1}{2}$$
$$= \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 2}{2}$$

$$\therefore f^*(u_i'' u_0') = \begin{cases} \dfrac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 1}{2}, i \text{ genap} ; 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 2}{2}, i \text{ ganjil} ;\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

4. Untuk sisi $e = u_1' u_0''$,

$|(f(u_1'))^2 - (f(u_0''))^2| = |(1)^2 - (2)^2| = |1 - 4| = 3$

Karena $|(f(u_1'))^2 - (f(u_0''))^2| = 3$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah :

$$f^*(u_1' u_0'') = \frac{|(f(u_1'))^2 - (f(u_0''))^2| + 1}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

$\therefore f^*(u_1' u_0'') = 2$

5. Untuk sisi $e = u_i' u_0''$,

$|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| = |(i+1)^2 - (2)^2| = |i^2 + 2i + 1 - 4|$

$= i^2 + 2i - 3$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat, maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| = (2k)^2 + 2(2k) - 3 = 4k^2 + 4k - 3 = 2(2k^2 + 2k - 1) - 1$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i' u_0'') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| + 1}{2} = \frac{i^2 + 2i - 3 + 1}{2}$$
$$= \frac{i^2 + 2i - 2}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat, maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| = (2k+1)^2 + 2(2k) - 3 = 4k^2 + 8k = 2(2k^2 + 4k)$ adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya:

$$f^*(u_i' u_0'') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2|}{2} = \frac{i^2 + 2i - 3}{2}$$

$$\therefore f^*(u_i' u_0'') = \begin{cases} \dfrac{i^2 + 2i - 2}{2}, \text{jika } i \text{ genap}; 2 \le i \le n \\ \dfrac{i^2 + 2i - 3}{2}, \text{jika } i \text{ ganjil}; \ 2 \le i \le n \end{cases}$$

6. Untuk sisi $e = u_i'' u_0''$,

$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2| = |(n + i + 1)^2 - (2)^2|$

$= |n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 1 - 4|$

$= n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat , maka:

$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2|$

$= (2l + 1)^2 + (2k)^2 + 2(2l + 1)(2k) + 2(2l + 1)$
$+ 2(2k) - 3$

$= 4l^2 + 4k^2 + 8lk + 8k + 8l$

$= 2(2l^2 + 2k^2 + 4lk + 4k + 4l)$

adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i'' u_0'') = \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2|}{2} = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3}{2}$$

Jika$i$ ganjil, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat, maka:

$$
\begin{aligned}
&|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2| \\
&\qquad = (2l+1)^2 + (2k+1)^2 + 2(2l+1)(2k+1) \\
&\qquad + 2(2l+1) + 2(2k+1) - 3 \\
&\qquad = 4l^2 + 4k^2 + 8lk + 12l + 12k + 5 \\
&\qquad = 2(2l^2 + 2k^2 + 4lk + 6l + 6k + 2) + 1
\end{aligned}
$$

adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$
\begin{aligned}
f^*(u_i''u_0'') &= \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2| + 1}{2} \\
&= \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3 + 1}{2} \\
&= \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 2}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore f^*(u_i''u_0'') = \begin{cases} \dfrac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3}{2}, i \text{ genap}; 1 \le i \le n \\ \dfrac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 2}{2}, i \text{ ganjil}; 1 \le i \le n \end{cases}
$$

Kasus 2. Untuk n genap, misalkan $n = 2l$ untuk l suatu bilangan bulat, diperoleh label pada sisi-sisi di graf bayangan bintang $K_{1,n}$ berdasarkan definisi f^* sebagai berikut:

1. Untuk sisi $e = u_1'u_0'$,

   $|(f(u_1'))^2 - (f(u_0'))^2| = |(1)^2 - (0)^2| = |1 - 0| = 1$

   Karena $|(f(u_1'))^2 - (f(u_0'))^2| = 1$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

   $$f^*(u_1'u_0') = \frac{|(f(u_1'))^2 - (f(u_0'))^2| + 1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

   $\therefore f^*(u_1'u_0') = 1$

2. Untuk sisi $e = u_i'u_0'$,

   $$
   \begin{aligned}
   |(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| &= |(i+1)^2 - (0)^2| = |i^2 + 2i + 1 - 0| \\
   &= i^2 + 2i + 1
   \end{aligned}
   $$

   Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat, maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| = (2k)^2 + 2(2k) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ adalah suatu bilangan ganjil, maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| + 1}{2} = \frac{i^2 + 2i + 1 + 1}{2}$$
$$= \frac{i^2 + 2i + 2}{2}.$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat, maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| = (2k + 1)^2 + 2(2k + 1) + 1 = 4k^2 + 8k + 6 = 2(2k^2 + 4k + 3)$ adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2|}{2} = \frac{i^2 + 2i + 1}{2}.$$

$$\therefore f^*(u_i'u_0') = \begin{cases} \dfrac{i^2 + 2i + 2}{2}, \text{jika } i \text{ genap} ; 2 \leq i \leq n \\ \dfrac{i^2 + 2i + 1}{2}, \text{jika } i \text{ ganjil} ;\ 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

3. Untuk sisi $e = u_i''u_0'$,

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2| = |(n + i + 1)^2 - (0)^2| = |(n + i + 1)^2 - 0|$$
$$= n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 1$$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat, maka: $|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2| = (2l)^2 + (2k)^2 + 2(2l)(2k) + 2(2l) + 2(2k) + 1 = 2(2l^2 + 2k^2 + 2l + 2k + 4lk) + 1$

adalah suatu bilangan ganjil, maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2| + 1}{2}$$
$$= \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 1 + 1}{2}$$
$$= \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 2}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat, maka:

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2|$$
$$= (2l)^2 + (2k + 1)^2 + 2(2l)(2k + 1) + 2(2l)$$
$$+ 2(2k + 1) + 1$$
$$= 4l^2 + 4k^2 + 8lk + 8l + 8k + 4$$
$$= 2(2l^2 + 2k^2 + 4lk + 4l + 4k + 2)$$

adalah suatu bilangan genap, maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2|}{2} = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 1}{2}$$

$$\therefore f^*(u_i''u_0') = \begin{cases} \dfrac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 2}{2}, i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 1}{2}, i \text{ ganjil} ;\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

4. Untuk sisi $e = u_1'u_0''$,

   $|(f(u_1'))^2 - (f(u_0''))^2| = |(1)^2 - (2)^2| = |1 - 4| = 3$

   Karena $|(f(u_1'))^2 - (f(u_0''))^2| = 3$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah :

   $$f^*(u_1'u_0'') = \frac{|(f(u_1'))^2 - (f(u_0''))^2| + 1}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

   $\therefore f^*(u_1'u_0'') = 2$

5. Untuk sisi $e = u_i'u_0''$,

   $$|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| = |(i + 1)^2 - (2)^2| = |i^2 + 2i + 1 - 4|$$
   $$= i^2 + 2i - 3$$

   Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat, maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| = (2k)^2 + 2(2k) - 3 = 4k^2 + 4k - 3 = 2(2k^2 + 2k - 1) - 1$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

   $$f^*(u_i'u_0'') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| + 1}{2} = \frac{i^2 + 2i - 3 + 1}{2}$$
   $$= \frac{i^2 + 2i - 2}{2}$$

   Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat, maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| = (2k + 1)^2 + 2(2k) - 3 = 4k^2 + 8k = 2(2k^2 + 4k)$ adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

   $$f^*(u_i'u_0'') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2|}{2} = \frac{i^2 + 2i - 3}{2}$$

   $$\therefore f^*(u_i'u_0'') = \begin{cases} \dfrac{i^2 + 2i - 2}{2}, \text{jika } i \text{ genap} ; 2 \le i \le n \\ \dfrac{i^2 + 2i - 3}{2}, \text{jika } i \text{ ganjil} ;\ 2 \le i \le n \end{cases}$$

6. Untuk sisi $e = u_i'' u_0''$,

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2| = |(n+i+1)^2 - (2)^2|$$
$$= |n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 1 - 4|$$
$$= n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3$$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat , maka:

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2|$$
$$= (2l)^2 + (2k)^2 + 2(2l)(2k) + 2(2l) + 2(2k) - 3$$
$$= 4l^2 + 4k^2 + 8lk + 4k + 4l - 3$$
$$= 2(2l^2 + 2k^2 + 4lk + 2k + 2l - 1) - 1$$

adalah suatu bilangan ganjil, maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i'' u_0'') = \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2| + 1}{2}$$
$$= \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3 + 1}{2}$$
$$= \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 2}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat, maka:

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2|$$
$$= (2l)^2 + (2k+1)^2 + 2(2l)(2k+1) + 2(2l)$$
$$+ 2(2k+1) - 3$$
$$= 4l^2 + 4k^2 + 8lk + 8l + 8k - 2$$
$$= 2(2l^2 + 2k^2 + 4lk + 4l + 4k - 1)$$

adalah suatu bilangan genap, maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i'' u_0'') = \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2|}{2} = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3}{2}$$

$$\therefore f^*(u_i'' u_0'') = \begin{cases} \dfrac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 2}{2}, i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3}{2}, i \text{ ganjil} ;\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

Kedua kasus pelabelan sisi diatas dapat diperumum sehingga diperoleh pelabelan sisi sebagai berikut:

$$f^*(u_i'u_0') = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = 1 \\ \dfrac{i^2+2i+2}{2}, & \text{jika } i \text{ genap} ; 2 \le i \le n \\ \dfrac{i^2+2i+1}{2}, & \text{jika } i \text{ ganjil} ;\ 2 \le i \le n \end{cases}$$

$$f^*(u_i''u_0') = \begin{cases} \dfrac{n^2+i^2+2ni+2n+2i+2}{2}, & n+i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{n^2+i^2+2ni+2n+2i+1}{2}, & n+i \text{ ganjil} ;\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

$$f^*(u_i'u_0'') = \begin{cases} 2, & \text{jika } i = 1 \\ \dfrac{i^2+2i-2}{2}, & \text{jika } i \text{ genap} ; 2 \le i \le n \\ \dfrac{i^2+2i-3}{2}, & \text{jika } i \text{ ganjil} ;\ 2 \le i \le n \end{cases}$$

$$f^*(u_i''u_0'') = \begin{cases} \dfrac{n^2+i^2+2ni+2n+2i-2}{2}, & n+i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{n^2+i^2+2ni+2n+2i-3}{2}, & n+i \text{ ganjil} ;\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

Selanjutnya harus dibuktikan bahwa berdasarkan pelabelan sisi f^* diatas, tidak ada dua sisi berbeda yang memiliki label yang sama.

Untuk membuktikan hal tersebut maka pelabelan sisi f^* di atas harus memenuhi pernyataan-pernyataan berikut ini.

i. $i \neq j \Rightarrow f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j'u_0')$

ii. $i \neq j \Rightarrow f^*(u_i''u_0') \neq f^*(u_j''u_0')$

iii. $i \neq j \Rightarrow f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0'')$

iv. $i \neq j \Rightarrow f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0'')$

v. $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j'u_0'')\ \forall\, i,j \in \mathbb{Z}$

vi. $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')\ \forall\, i,j \in \mathbb{Z}$

vii. $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j''u_0'')\ \forall\, i,j \in \mathbb{Z}$

viii. $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j''u_0'')\ \forall\, i,j \in \mathbb{Z}$

ix. $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j''u_0')\ \forall\, i,j \in \mathbb{Z}$

x. $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')\ \forall\, i,j \in \mathbb{Z}$

Di bawah ini akan ditunjukkan bahwa pelabelan sisi f^* memenuhi pernyataan-pernyataan di atas.

i. Akan ditunjukkan bahwa jika $i \neq j$ maka $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j'u_0')$. Cukup dibuktikan bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u_i'u_0') < f^*(u_j'u_0')$.

Bukti : Misalkan n suatu bilangan bulat sebarang. Misalkan $i < j$ dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

1. Untuk $i = 1$,

$f^*(u_1'u_0') = 1$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{j^2 + 2j + 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{(2m)^2 + 2(2m) + 2}{2} = \frac{4m^2 + 4m + 2}{2}$$
$$= 2m^2 + 2m + 1$$

Sehingga,

$$f^*(u_j'u_0') - f^*(u_1'u_0') = 2m^2 + 2m + 1 - 1 = 2m^2 + 2m$$
$$\geq 2(1)^2 + 2(1) = 4$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j'u_0') - f^*(u_1'u_0') > 0$ maka $f^*(u_j'u_0') > f^*(u_1'u_0')$

b. Jika j ganjl,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{j^2 + 2j + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{(2m + 1)^2 + 2(2m + 1) + 1}{2}$$

$$= \frac{4m^2 + 4m + 1 + 4m + 2 + 1}{2} = 2m^2 + 4m + 2$$

Sehingga,

$$f^*(u_j'u_0') - f^*(u_1'u_0') = 2m^2 + 4m + 2 - 1$$
$$= 2m^2 + 4m + 1$$
$$\geq 2(1)^2 + 4(1) + 1 = 7$$

$\therefore$ Karena $f^*(u'_j u'_0) - f^*(u'_1 u'_0) > 0$ maka $f^*(u'_j u'_0) > f^*(u'_1 u'_0)$

2. Untuk i genap, $i > 1$

$$f^*(u'_i u'_0) = \frac{i^2 + 2i + 2}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u'_i u'_0) = \frac{(2k)^2 + 2(2k) + 2}{2} = \frac{4k^2 + 4k + 2}{2} = 2k^2 + 2k + 1$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u'_j u'_0) = \frac{j^2 + 2j + 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u'_j u'_0) = \frac{(2m)^2 + 2(2m) + 2}{2} = \frac{4m^2 + 4m + 2}{2}$$
$$= 2m^2 + 2m + 1$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} f^*(u'_j u'_0) - f^*(u'_i u'_0) &= 2m^2 + 2m + 1 - 2k^2 - 2k - 1 \\ &= 2(m^2 - k^2) + 2(m - k) \\ &\geq 2(1) + 2(1) = 4 \end{aligned}$$

$\therefore$ Karena $f^*(u'_j u'_0) - f^*(u'_i u'_0) > 0$ maka $f^*(u'_j u'_0) > f^*(u'_i u'_0)$

b. Jika j ganjl,

$$f^*(u'_j u'_0) = \frac{j^2 + 2j + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*(u'_j u'_0) = \frac{(2m + 1)^2 + 2(2m + 1) + 1}{2}$$
$$= \frac{4m^2 + 4m + 1 + 4m + 2 + 1}{2} = 2m^2 + 4m + 2$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} f^*(u'_j u'_0) - f^*(u'_i u'_0) &= 2m^2 + 4m + 2 - 2k^2 + 2k + 1 \\ &= 2(m^2 - k^2) + 2(m - k) + 2m + 1 \\ &\geq 2(0) + 2(0) + 2(1) + 1 = 3 \end{aligned}$$

$\therefore$ Karena $f^*(u'_j u'_0) - f^*(u'_i u'_0) > 0$ maka $f^*(u'_j u'_0) > f^*(u'_i u'_0)$

3. Untuk i ganjil, $i > 1$

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{i^2 + 2i + 1}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{(2k+1)^2 + 2(2k+1) + 1}{2} = \frac{4k^2 + 8k + 4}{2}$$
$$= 2k^2 + 4k + 2$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u_j'u_0'\right) = \frac{j^2 + 2j + 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j'u_0'\right) = \frac{(2m)^2 + 2(2m) + 2}{2} = \frac{4m^2 + 4m + 2}{2}$$
$$= 2m^2 + 2m + 1$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j'u_0'\right) - f^*(u_i'u_0') = 2m^2 + 2m + 1 - 2k^2 - 4k - 2$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 2(m - k) - 2k - 1$$
$$\geq 2(1) + 2(1) - 2(1) - 1 = 1$$

∴ Karena $f^*\left(u_j'u_0'\right) - f^*(u_i'u_0') > 0$ maka $f^*\left(u_j'u_0'\right) > f^*(u_i'u_0')$.

b. Jika j ganjl,

$$f^*\left(u_j'u_0'\right) = \frac{j^2 + 2j + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j'u_0'\right) = \frac{(2m+1)^2 + 2(2m+1) + 1}{2} = \frac{4m^2 + 8m + 4}{2}$$
$$= 2m^2 + 4m + 2$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j'u_0'\right) - f^*(u_i'u_0') = 2m^2 + 4m + 2 - 2k^2 - 4k - 2$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 4(m - k)$$
$$> 2(0) + 4(0) = 0$$

∴ Karena $f^*\left(u_j'u_0'\right) - f^*(u_i'u_0') > 0$ maka $f^*\left(u_j'u_0'\right) > f^*(u_i'u_0')$.

$\therefore$ Terbukti bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u_i'u_0') < f^*\left(u_j'u_0'\right)$. Sehingga jika $i \neq j$ maka $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_j'u_0'\right)$.

ii. Akan ditunjukkan bahwa jika$i \neq j$ maka $f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$. Cukup buktikan bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u_i''u_0') < f^*\left(u_j''u_0'\right)$.

Bukti : Misalkan n suatu bilangan bulat sebarang. Misalkan $i < j$ dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

1. Untuk n genap dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 2}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 2n(2k) + 2n + 2(2k) + 2}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k + 2}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) + 2}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 2}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) - f^*(u_i''u_0')$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 2}{2}$$
$$- \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k + 2}{2}$$
$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 4(m - k)}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 2(m - k)$$
$$> 2(0) + 2(0)(0) + 2(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u_j''u_0'\right) - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*\left(u_j''u_0'\right) > f^*(u_i''u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right)$$
$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 2n(2m + 1) + 2n + 2(2m + 1) + 1}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 4}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) - f^*(u_i''u_0')$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 4}{2}$$
$$- \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k + 2}{2}$$
$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 4(m - k) + 4m + 2n + 2}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 2(m - k) + 2m + n + 1$$
$$\geq 2(0) + 2(1)(0) + 2(0) + 2(1) + 1 + 1 = 4$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u_j''u_0'\right) - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*\left(u_j''u_0'\right) > f^*(u_i''u_0')$.

2. Untuk n genap dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 1}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + (2k + 1)^2 + 2n(2k + 1) + 2n + 2(2k + 1) + 1}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 4k + 1 + 4nk + 2n + 2n + 4k + 2 + 1}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n + 4}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 2}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 2}{2}$$

$$- \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n + 4}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 4(m - k) - 4k - 2n - 2}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 2(m - k) - 2k - n - 1$$

$$\geq 2(1) + 2(1)(1) + 2(1) - 2(0) - 1 - 1 = 4$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$f^*(u_j''u_0')$

$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 2n(2m + 1) + 2n + 2(2m + 1) + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4m + 1 + 4nm + 2n + 2n + 4m + 2 + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 4}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 4}{2}$$

$$- \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n + 4}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 8(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 4(m - k)$$

$$> 2(0) + 2(1)(0) + 4(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0')$.

3. Untuk n ganjil dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 1}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 2n(2k) + 2n + 2(2k) + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k + 1}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 1}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 1}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k + 1}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 4(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 2(m - k)$$

$$\geq 2(0) + 2(1)(0) + 2(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$f^*\left(u_j''u_0'\right)$

$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 2n(2m+1) + 2n + 2(2m+1) + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4m + 1 + 4nm + 2n + 2n + 4m + 2 + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 5}{2}$$

Sehingga,

$f^*\left(u_j''u_0'\right) - f^*(u_i''u_0')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 5}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k + 1}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m-k) + 4(m-k) + 4m + 2n + 4}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m-k) + 2(m-k) + 2m + n + 2$$

$$\geq 2(0) + 2(1)(0) + 2(0) + 2(1) + 1 + 2 = 5$$

∴ Karena $f^*\left(u_j''u_0'\right) - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*\left(u_j''u_0'\right) > f^*(u_i''u_0')$.

4. Untuk n ganjil dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 2}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + (2k+1)^2 + 2n(2k+1) + 2n + 2(2k+1) + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n + 5}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 1}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 1}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n + 5}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 4(m - k) - 2n - 4k - 4}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 2(m - k) - n - 2k - 2$$

$$\geq 2(1) + 2(1)(1) + 2(1) - 1 - 2(0) - 2 = 3$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$f^*(u_j''u_0')$

$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 2n(2m + 1) + 2n + 2(2m + 1) + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 5}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 5}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n + 5}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 8(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 4(m - k)$$

$$> 2(0) + 2(1)(0) + 4(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0')$.

$\therefore$ Terbukti bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u_i''u_0') < f^*(u_j''u_0')$. Sehingga jika $i \neq j$ maka $f^*(u_i''u_0') \neq f^*(u_j''u_0')$.

iii. Akan ditunjukkan bahwa jika $i \neq j$ maka $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0'')$. Cukup dibuktikan bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u_i'u_0'') < f^*(u_j'u_0'')$.

Bukti : Misalkan n suatu bilangan bulat sebarang. Misalkan $i < j$ dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

1. Untuk $i = 1$,

$f^*(u_1'u_0'') = 2$

a. Jika *j* genap,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{j^2 + 2j - 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{(2m)^2 + 2(2m) - 2}{2} = \frac{4m^2 + 4m - 2}{2}$$
$$= 2m^2 + 2m - 1$$

Sehingga,

$$f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_1'u_0'') = 2m^2 + 2m - 1 - 2 = 2m^2 + 2m - 3$$
$$\geq 2(1) + 2(1) - 3 = 1$$

∴ Karena $f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_1'u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j'u_0'') > f^*(u_1'u_0'')$.

b. Jika *j* ganjil,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{j^2 + 2j - 3}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{(2m+1)^2 + 2(2m+1) - 3}{2}$$
$$= \frac{4m^2 + 4m + 1 + 4m + 2 - 3}{2} = 2m^2 + 4m$$

Sehingga,

$$f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_1'u_0'') = 2m^2 + 4m - 2 \geq 2(1) + 4(1) - 2 = 4$$

∴ Karena $f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_1'u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j'u_0'') > f^*(u_1'u_0'')$

2. Untuk *i* genap, $i > 1$

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{i^2 + 2i - 2}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{(2k)^2 + 2(2k) - 2}{2} = 2k^2 + 2k - 1$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{j^2 + 2j - 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{(2m)^2 + 2(2m) - 2}{2} = 2m^2 + 2m - 1$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_i'u_0'') &= 2m^2 + 2m - 1 - 2k^2 - 2k + 1 \\ &= 2(m^2 - k^2) + 2(m - k) \\ &> 2(0) + 2(0) = 0 \end{aligned}$$

∴ Karena $f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_i'u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j'u_0'') > f^*(u_i'u_0'')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{j^2 + 2j - 3}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$\begin{aligned} f^*(u_j'u_0'') &= \frac{(2m + 1)^2 + 2(2m + 1) - 3}{2} \\ &= \frac{4m^2 + 4m + 1 + 4m + 2 - 3}{2} = 2m^2 + 4m \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_i'u_0'') &= 2m^2 + 4m - 2k^2 - 2k + 1 \\ &= 2(m^2 - k^2) + 2(m - k) + 2m + 1 \\ &\geq 2(0) + 2(0) + 2(1) + 1 = 3 \end{aligned}$$

∴ Karena $f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_i'u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j'u_0'') > f^*(u_i'u_0'')$.

3. Untuk i ganjil, $i > 1$.

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{i^2 + 2i - 3}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{(2k + 1)^2 + 2(2k + 1) - 3}{2} = \frac{4k^2 + 8k}{2} = 2k^2 + 4k$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u'_j u''_0) = \frac{j^2 + 2j - 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u'_j u''_0) = \frac{(2m)^2 + 2(2m) - 2}{2} = \frac{4m^2 + 4m - 2}{2}$$
$$= 2m^2 + 2m - 1$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} f^*(u'_j u''_0) - f^*(u'_i u''_0) &= 2m^2 + 2m - 1 - 2k^2 - 4k \\ &= 2(m^2 - k^2) + 2(m - k) - 2k - 1 \\ &\geq 2(1) + 2(1) - 2(0) - 1 = 1 \end{aligned}$$

∴ Karena $f^*(u'_j u''_0) - f^*(u'_i u''_0) > 0$ maka $f^*(u'_j u''_0) > f^*(u'_i u''_0)$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u'_j u''_0) = \frac{j^2 + 2j - 3}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u'_j u''_0) = \frac{(2m + 1)^2 + 2(2m + 1) - 3}{2}$$
$$= \frac{4m^2 + 4m + 1 + 4m + 2 - 3}{2} = 2m^2 + 4m$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} f^*(u'_j u''_0) - f^*(u'_i u''_0) &= 2m^2 + 4m - 2k^2 - 4k \\ &= 2(m^2 - k^2) + 4(m - k) \\ &> 2(0) + 2(0) = 0 \end{aligned}$$

∴ Karena $f^*(u'_j u''_0) - f^*(u'_i u''_0) > 0$ maka $f^*(u'_j u''_0) > f^*(u'_i u''_0)$.

∴ Terbukti bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u'_i u''_0) < f^*(u'_j u''_0)$. Sehingga jika $i \neq j$ maka $f^*(u'_i u''_0) \neq f^*(u'_j u''_0)$.

iv. Akan ditunjukkan bahwa jika $i \neq j$ maka $f^*(u''_i u''_0) \neq f^*(u''_j u''_0)$. Cukup dibuktikan bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u''_i u''_0) < f^*(u''_j u''_0)$.

Bukti : Misalkan n suatu bilangan bulat sebarang. Misalkan $i < j$ dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

1. Untuk n genap dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 2}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 2n(2k) + 2n + 2(2k) - 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 2}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j - 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) - 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m - 2}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m - 2}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 2}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 4(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 2(m - k)$$

$$> 2(0) + 2(1)(0) + 2(0) = 0$$

∴ Karena $f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*\left(u_j''u_0''\right) > f^*(u_i''u_0'')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j - 3}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right)$$

$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 2n(2m + 1) + 2n + 2(2m + 1) - 3}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4m + 1 + 4nm + 2n + 2n + 4m + 2 - 3}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n}{2}$$

Sehingga,

$f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 2}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 4(m - k) + 4m + 2n + 2}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 2(m - k) + 2m + n + 1$$

$$\geq 2(0) + 2(1)(0) + 2(0) + 2(1) + 1 + 1 = 4$$

∴ Karena $f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*\left(u_j''u_0''\right) > f^*(u_i''u_0'')$.

2. Untuk n genap dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k + 1)^2 + 2n(2k + 1) + 2n + 2(2k + 1) - 3}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j - 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) - 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m - 2}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0'') - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m - 2}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 4(m - k) - 2n - 4k - 2}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 2(m - k) - n - 2k - 2$$

$$\geq 2(1) + 2(1)(1) + 2(1) - 1 - 2(0) - 2 = 3$$

∴ Karena $f^*(u_j''u_0'') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0'') > f^*(u_i''u_0'')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0'') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j - 3}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$f^*(u_j''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 2n(2m + 1) + 2n + 2(2m + 1) - 3}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4m + 1 + 4nm + 2n + 2n + 4m + 2 - 3}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0'') - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 8(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 4(m - k)$$

$$> 2(0) + 2(1)(0) + 4(0) = 0$$

∴ Karena $f^*(u_j''u_0'') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0'') > f^*(u_i''u_0'')$.

3. Untuk n ganjil dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 2n(2k) + 2n + 2(2k) - 3}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 3}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j - 3}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) - 3}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m - 3}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'')$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m - 3}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 3}{2}$$
$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 4(m - k)}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 2(m - k)$$
$$> 2(0) + 2(1)(0) + 2(0) = 0$$

∴ Karena $f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*\left(u_j''u_0''\right) > f^*(u_i''u_0'')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j - 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right)$$
$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 2n(2m + 1) + 2n + 2(2m + 1) - 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 1}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0'') - f^*(u_i''u_0'')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 1}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 3}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m-k) + 4(m-k) + 4m + 2n + 4}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m-k) + 2(m-k) + 2m + n + 2$$

$$\geq 2(0) + 2(1)(0) + 2(0) + 2(1) + 1 + 2 = 5$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0'') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0'') > f^*(u_i''u_0'')$.

4. Untuk n ganjil dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 2}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k+1)^2 + 2n(2k+1) + 2n + 2(2k+1) - 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 4k + 1 + 4nk + 2n + 2n + 4k + 2 - 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n + 1}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j''u_0'') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j - 3}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0'') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) - 3}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m - 3}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0'') - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m - 3}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n + 1}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 4(m - k) - 2n - 4k - 4}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 2(m - k) - n - 2k - 2$$

$$\geq 2(1) + 2(1)(1) + 2(1) - 1 - 2(0) - 2 = 3$$

∴ Karena $f^*(u_j''u_0'') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0'') > f^*(u_i''u_0'')$.

b. Jika *j* ganjil,

$$f^*(u_j''u_0'') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j - 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$f^*(u_j''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 2n(2m + 1) + 2n + 2(2m + 1) - 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 1}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0'') - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 1}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n + 1}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 8(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 4(m - k)$$

$$> 2(0) + 2(1)(0) + 4(0) = 0$$

∴ Karena $f^*(u_j''u_0'') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0'') > f^*(u_i''u_0'')$.

∴ Terbukti bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u_i''u_0'') < f^*(u_j''u_0'')$. Sehingga jika $i \neq j$ maka $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0'')$.

v. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j'u_0'')\ \forall i,j \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Misalkan n suatu bilangan bulat sebarang, dimana $1 \leq i,j \leq n$ dengan $i,j \in \mathbb{Z}$.

Kasus 1. Misalkan $i = j$

1. Untuk $i = 1$,

   $f^*(u_1'u_0') = 1$ dan $f^*(u_1'u_0'') = 2$

   ∴Terlihat jelas bahwa $f^*(u_1'u_0') \neq f^*(u_1'u_0'')$.

2. Untuk i genap, dimana $i > 1$,

   $$f^*(u_i'u_0') = \frac{i^2 + 2i + 2}{2}$$

   $$f^*(u_j'u_0'') = \frac{i^2 + 2i - 2}{2}$$

   Sehingga,

   $$f^*(u_i'u_0') - f^*(u_j'u_0'') = \frac{i^2 + 2i + 2}{2} - \frac{i^2 + 2i - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2 > 0$$

   ∴ Karena $f^*(u_i'u_0') - f^*(u_j'u_0'') > 0$ maka, $f^*(u_i'u_0') > f^*(u_j'u_0'')$. Artinya $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j'u_0'')$.

3. Untuk i ganjil, dimana $i > 1$,

   $$f^*(u_i'u_0') = \frac{i^2 + 2i + 1}{2}$$

   $$f^*(u_j'u_0'') = \frac{i^2 + 2i - 3}{2}$$

   Sehingga,

   $$f^*(u_i'u_0') - f^*(u_j'u_0'') = \frac{i^2 + 2i + 1}{2} - \frac{i^2 + 2i - 3}{2} = \frac{4}{2} = 2 > 0$$

   ∴ Karena $f^*(u_i'u_0') - f^*(u_j'u_0'') > 0$ maka, $f^*(u_i'u_0') > f^*(u_j'u_0'')$. Artinya $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j'u_0'')$.

   ∴ Terbukti bahwa $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j'u_0'')$ untuk $i = j$.

Kasus 2. Misalkan $i < j$

1. Untuk $i = 1$,

   $f^*(u_1'u_0') = 1$

a. Untuk j genap,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) = \frac{j^2 + 2j - 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dengan $m \geq 1$. Maka,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) = \frac{(2m)^2 + 2(2m) - 2}{2} = \frac{4m^2 + 4m - 2}{2}$$

$$= 2m^2 + 2m - 1$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) - f^*(u_1'u_0') = 2m^2 + 2m - 1 - 1 = 2m^2 + 2m - 2$$

$$\geq 2(1) + 2(1) - 2 = 2$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u_j'u_0''\right) - f^*(u_1'u_0') > 0$ maka, $f^*\left(u_j'u_0''\right) > f^*(u_1'u_0')$.

Artinya $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_j'u_0''\right)$.

b. Untuk j ganjil,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) = \frac{j^2 + 2j - 3}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dengan $m \geq 1$. Maka,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) = \frac{(2m+1)^2 + 2(2m+1) - 3}{2} = \frac{4m^2 + 8m}{2}$$

$$= 2m^2 + 4m$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) - f^*(u_1'u_0') = 2m^2 + 4m - 1$$

$$\geq 2(1) + 4(1) - 1 = 5$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u_j'u_0''\right) - f^*(u_1'u_0') > 0$ maka, $f^*\left(u_j'u_0''\right) > f^*(u_1'u_0')$.

Artinya $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_j'u_0''\right)$.

2. Untuk i genap, dimana $i > 1$,

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{i^2 + 2i + 2}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dengan $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{(2k)^2 + 2(2k) + 2}{2} = \frac{4k^2 + 4k + 2}{2} = 2k^2 + 2k + 1$$

a. Untuk j genap,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) = \frac{j^2 + 2j - 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dengan $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{(2m)^2 + 2(2m) - 2}{2} = \frac{4m^2 + 4m - 2}{2}$$

$$= 2m^2 + 2m - 1$$

Sehingga,

$$f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_i'u_0') = 2m^2 + 2m - 1 - 2k^2 - 2k - 1$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2(m - k) - 2$$

$$\geq 2(1) + 2(1) - 2 = 2$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_i'u_0') > 0$ maka, $f^*(u_j'u_0'') > f^*(u_i'u_0')$. Artinya $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j'u_0'')$.

b. Untuk *j* ganjil,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{j^2 + 2j - 3}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dengan $m \geq k$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{(2m+1)^2 + 2(2m+1) - 3}{2} = \frac{4m^2 + 8m}{2}$$

$$= 2m^2 + 4m$$

Sehingga,

$$f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_i'u_0') = 2m^2 + 4m - 2k^2 - 2k - 1$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2(m - k) + 2m - 1$$

$$\geq 2(0) + 2(0) + 2(1) - 1 = 1$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_i'u_0') > 0$ maka, $f^*(u_j'u_0'') > f^*(u_i'u_0')$. Artinya $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j'u_0'')$.

3. Untuk i ganjil, dimana $i > 1$,

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{i^2 + 2i + 1}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dengan $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{(2k+1)^2 + 2(2k+1) + 1}{2} = \frac{4k^2 + 8k + 4}{2}$$

$$= 2k^2 + 4k + 2$$

a. Untuk *j* genap,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{j^2 + 2j - 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dengan $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j' u_0'') = \frac{(2m)^2 + 2(2m) - 2}{2} = \frac{4m^2 + 4m - 2}{2}$$
$$= 2m^2 + 2m - 1$$

Sehingga,

$$f^*(u_j' u_0'') - f^*(u_i' u_0') = 2m^2 + 2m - 1 - 2k^2 - 4k - 2$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 2(m - k) - 2k - 1$$
$$\geq 2(1) + 2(1) - 2(1) - 1 = 1$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j' u_0'') - f^*(u_i' u_0') > 0$ maka, $f^*(u_j' u_0'') > f^*(u_i' u_0')$. Artinya $f^*(u_i' u_0') \neq f^*(u_j' u_0'')$.

b. Untuk j ganjil,

$$f^*(u_j' u_0'') = \frac{j^2 + 2j - 3}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j' u_0'') = \frac{(2m + 1)^2 + 2(2m + 1) - 3}{2} = \frac{4m^2 + 8m}{2}$$
$$= 2m^2 + 4m$$

Sehingga,

$$f^*(u_j' u_0'') - f^*(u_i' u_0') = 2m^2 + 4m - 2k^2 - 4k - 2$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 4(m - k) - 2$$
$$\geq 2(1) + 4(1) - 2 = 4$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j' u_0'') - f^*(u_i' u_0') > 0$ maka, $f^*(u_j' u_0'') > f^*(u_i' u_0')$. Artinya $f^*(u_i' u_0') \neq f^*(u_j' u_0'')$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $f^*(u_i' u_0') \neq f^*(u_j' u_0'')$ untuk $i < j$.

Kasus 3. Misalkan $i > j$.

1. Untuk i genap,

$$f^*(u_i' u_0') = \frac{i^2 + 2i + 2}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i' u_0') = \frac{(2k)^2 + 2(2k) + 2}{2} = \frac{4k^2 + 4k + 2}{2} = 2k^2 + 2k + 1$$

a. Untuk $j = 1$,

$f^*(u_j'u_0'') = 2$

Sehingga,

$$f^*(u_i'u_0') - f^*(u_j'u_0'') = 2k^2 + 2k + 1 - 2 = 2k^2 + 2k - 1$$
$$\geq 2(1) + 2(1) - 1 = 3$$

∴ Karena $f^*(u_i'u_0') - f^*(u_j'u_0'') > 0$ maka, $f^*(u_i'u_0') > f^*(u_j'u_0'')$. Artinya $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j'u_0'')$.

b. Untuk j genap, dimana $j > 1$,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{j^2 + 2j - 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m < k$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{(2m)^2 + 2(2m) - 2}{2} = \frac{4m^2 + 4m - 2}{2}$$
$$= 2m^2 + 2m - 1$$

Sehingga,

$$f^*(u_i'u_0') - f^*(u_j'u_0'') = 2k^2 + 2k + 1 - 2m^2 - 2m + 1$$
$$= 2(k^2 - m^2) + 2(k - m) + 2$$
$$> 2(0) + 2(0) + 2 = 2$$

∴ Karena $f^*(u_i'u_0') - f^*(u_j'u_0'') > 0$ maka, $f^*(u_i'u_0') > f^*(u_j'u_0'')$. Artinya $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j'u_0'')$.

c. Untuk j ganjil, dimana $j > 1$,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{j^2 + 2j - 3}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m < k$ dan $m \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{(2m + 1)^2 + 2(2m + 1) - 3}{2} = \frac{4m^2 + 8m}{2}$$
$$= 2m^2 + 4m$$

Sehingga,

$$f^*(u_i'u_0') - f^*(u_j'u_0'') = 2k^2 + 2k + 1 - 2m^2 - 4m$$
$$= 2(k^2 - m^2) + 2(k - m) - 2m + 1$$
$$\geq 2(1) + 2(1) - 2(1) + 1 = 3$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i'u_0') - f^*\left(u_j'u_0''\right) > 0$ maka, $f^*(u_i'u_0') > f^*\left(u_j'u_0''\right)$. Artinya $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_j'u_0''\right)$.

2. Untuk i ganjil,

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{i^2 + 2i + 1}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{(2k+1)^2 + 2(2k+1) + 1}{2} = \frac{4k^2 + 8k + 4}{2}$$
$$= 2k^2 + 4k + 2$$

a. Untuk $j = 1$,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) = 2$$

Sehingga,

$$f^*(u_i'u_0') - f^*\left(u_j'u_0''\right) = 2k^2 + 4k + 2 - 2 = 2k^2 + 4k$$
$$\geq 2(1) + 4(1) = 6$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i'u_0') - f^*\left(u_j'u_0''\right) > 0$ maka, $f^*(u_i'u_0') > f^*\left(u_j'u_0''\right)$. Artinya $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_j'u_0''\right)$.

b. Untuk j genap, dimana $j > 1$,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) = \frac{j^2 + 2j - 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m \leq k$. Maka,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) = \frac{(2m)^2 + 2(2m) - 2}{2} = \frac{4m^2 + 4m - 2}{2}$$
$$= 2m^2 + 2m - 1$$

Sehingga,

$$f^*(u_i'u_0') - f^*\left(u_j'u_0''\right) = 2k^2 + 4k + 2 - 2m^2 - 2m + 1$$
$$= 2(k^2 - m^2) + 2(k - m) + 2k + 3$$
$$\geq 2(0) + 2(0) + 2(1) + 3 = 5$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i'u_0') - f^*\left(u_j'u_0''\right) > 0$ maka, $f^*(u_i'u_0') > f^*\left(u_j'u_0''\right)$. Artinya $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_j'u_0''\right)$.

c. Untuk j ganjil, dimana $j > 1$,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) = \frac{j^2 + 2j - 3}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m < k$ dan $m \geq 1$. Maka,

$$f^*\left(u_j' u_0''\right) = \frac{(2m+1)^2 + 2(2m+1) - 3}{2} = \frac{4m^2 + 8m}{2}$$
$$= 2m^2 + 4m$$

Sehingga,

$$f^*(u_i' u_0') - f^*\left(u_j' u_0''\right) = 2k^2 + 4k + 2 - 2m^2 - 4m$$
$$= 2(k^2 - m^2) + 4(k - m) + 2$$
$$> 2(0) + 4(0) + 2 = 2$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i' u_0') - f^*\left(u_j' u_0''\right) > 0$ maka, $f^*(u_i' u_0') > f^*\left(u_j' u_0''\right)$. Artinya $f^*(u_i' u_0') \neq f^*\left(u_j' u_0''\right)$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $f^*(u_i' u_0') \neq f^*\left(u_j' u_0''\right)$ untuk $i > j$.

$\therefore$ Karena telah terbukti bahwa $f^*(u_i' u_0') \neq f^*\left(u_j' u_0''\right)$ untuk $i = j$, $i < j$ dan $i > j$, maka dapat disimpulkan bahwa $f^*(u_i' u_0') \neq f^*\left(u_j' u_0''\right)$ untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$.

vi. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i'' u_0'') \neq f^*\left(u_j'' u_0'\right)$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}$.

Bukti : Misalkan n suatu bilangan bulat sebarang, dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

Kasus 1. Misalkan $i = j$.

1. Untuk $n + i$ genap,

$$f^*(u_i'' u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 2}{2}$$
$$f^*\left(u_j'' u_0'\right) = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 2}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j'' u_0'\right) - f^*(u_i'' u_0'')$$
$$= \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 2}{2}$$
$$- \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2 > 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$.

Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

2. Untuk $n + i$ ganjil,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3}{2}$$

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 1}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$$

$$= \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 1}{2}$$

$$- \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3}{2} = \frac{4}{2} = 2 > 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$.

Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$ untuk $i = j$.

Kasus 2. Misalkan $i < j$.

1. Untuk n genap dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 2}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dengan $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 2n(2k) + 2n + 2(2k) - 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 2}{2}$$

a. Untuk j genap,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 2}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 2}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 2}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m-k) + 4(m-k) + 4}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m-k) + 2(m-k) + 2$$

$$> 2(0) + 2(1)(0) + 2(0) + 2 = 2$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

b. Untuk j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$f^*(u_j''u_0')$

$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 2n(2m+1) + 2n + 2(2m+1) + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4m + 4nm + 2n + 2n + 4m + 2 + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 4}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 4}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 2}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m-k) + 4(m-k) + 4m + 2n + 2}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m-k) + 2(m-k) + 2m + n + 1$$

$$\geq 2(0) + 2(1)(0) + 2(0) + 2(1) + 1 + 1 = 4$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$.

Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

2. Untuk n genap dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dengan $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k+1)^2 + 2n(2k+1) + 2n + 2(2k+1) - 3}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n}{2}$$

a. Untuk j genap,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 2}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 2}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m-k) + 4(m-k) - 4k - 2n + 2}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m-k) + 2(m-k) - 2k - n + 1$$

$$\geq 2(1) + 2(1)(1) + 2(1) - 2(0) - 1 + 1 = 6$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$.

Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

b. Untuk j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$f^*(u_j''u_0')$

$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 2n(2m+1) + 2n + 2(2m+1) + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4m + 4nm + 2n + 2n + 4m + 2 + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 4}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 4}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m-k) + 8(m-k) + 4}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m-k) + 4(m-k) + 2$$

$$> 2(0) + 2(1)(0) + 4(0) + 2 = 2$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

3. Untuk n ganjil dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dengan $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 2n(2k) + 2n + 2(2k) - 3}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 3}{2}$$

a. Untuk j genap,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 1}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 1}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 3}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 4(m - k) - 2}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 2(m - k) - 2$$

$$\geq 2(1) + 2(1)(1) + 2(1) - 2 = 4$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

b. Untuk j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$f^*(u_j''u_0')$

$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 2n(2m + 1) + 2n + 2(2m + 1) + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 5}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 5}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 3}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 4(m - k) + 4m + 8}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 2(m - k) + 2m + 4$$

$$\geq 2(0) + 2(1)(0) + 2(0) + 2(1) + 4 = 6$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

4. Untuk n ganjil dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 2}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dengan $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k+1)^2 + 2n(2k+1) + 2n + 2(2k+1) - 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n + 1}{2}$$

a. Untuk j genap,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 1}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 1}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n + 1}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m-k) + 4(m-k) - 2n - 4k}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m-k) + 2(m-k) - n - 2k$$

$$\geq 2(1) + 2(1)(1) + 2(1) - 1 - 2(1) = 3$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

b. Untuk j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0')$$

$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 2n(2m+1) + 2n + 2(2m+1) + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 5}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 5}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n + 1}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 8(m - k) + 4}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 4(m - k) + 2$$

$$> 2(0) + 2(1)(0) + 4(0) + 2 = 2$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$.

Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$ untuk $i < j$.

Kasus 3. Misalkan $i > j$.

1. Untuk n genap dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 2}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dengan $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 2n(2k) + 2n + 2(2k) - 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 2}{2}$$

a. Untuk j genap,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m < k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 2}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_i''u_0'') - f^*(u_j''u_0')$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 2}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 2}{2}$$

$$= \frac{4(k^2 - m^2) + 4n(k - m) + 4(k - m) - 4}{2}$$

$$= 2(k^2 - m^2) + 2n(k - m) + 2(k - m) - 2$$

$$\geq 2(1) + 2(1)(1) + 2(1) - 2 = 4$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*(u_j''u_0') > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*(u_j'u_0)$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

b. Untuk j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m < k$ dan $m \geq 0$. Maka,

$f^*(u_j''u_0')$

$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 2n(2m + 1) + 2n + 2(2m + 1) + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4m + 4nm + 2n + 2n + 4m + 2 + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 4}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_i''u_0'') - f^*(u_j''u_0')$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 2}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 4}{2}$$

$$= \frac{4(k^2 - m^2) + 4n(k - m) + 4(k - m) - 2n - 4m - 6}{2}$$

$$= 2(k^2 - m^2) + 2n(k - m) + 2(k - m) - n - 2m - 3$$

$$\geq 2(1) + 2(1)(1) + 2(1) - 1 - 2(0) - 3 = 2$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*(u_j''u_0') > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*(u_j''u_0')$.

Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

2. Untuk n genap dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dengan $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k+1)^2 + 2n(2k+1) + 2n + 2(2k+1) - 3}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n}{2}$$

a. Untuk j genap,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m \leq k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 2}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_i''u_0'') - f^*(u_j''u_0')$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 2}{2}$$

$$= \frac{4(k^2 - m^2) + 4n(k-m) + 4(k-m) + 4k + 2n - 2}{2}$$

$$= 2(k^2 - m^2) + 2n(k-m) + 2(k-m) + 2k + n - 1$$

$$> 2(0) + 2(1)(0) + 2(0) + 2(1) + 1 - 1 = 2$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*(u_j''u_0') > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*(u_j''u_0')$.

Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

b. Untuk j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m < k$ dan $m \geq 0$. Maka,

$f^*\left(u_j''u_0'\right)$

$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 2n(2m+1) + 2n + 2(2m+1) + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 4}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right)$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 4}{2}$$

$$= \frac{4(k^2 - m^2) + 4n(k-m) + 8(k-m) - 4}{2}$$

$$= 2(k^2 - m^2) + 2n(k-m) + 4(k-m) - 2$$

$$\geq 2(1) + 2(1)(1) + 4(1) - 2 = 6$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right) > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*\left(u_j''u_0'\right)$.

Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$.

3. Untuk n ganjil dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dengan $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 2n(2k) + 2n + 2(2k) - 3}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 3}{2}$$

a. Untuk j genap,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m < k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 1}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right)$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 3}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 1}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m - k) + 4(m - k) - 4}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m - k) + 2(m - k) - 2$$

$$\geq 2(1) + 2(1)(1) + 2(1) - 2 = 4$$

∴ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right) > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*\left(u_j''u_0'\right)$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$.

b. Untuk j ganjil,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m < k$ dan $m \geq 0$. Maka,

$f^*\left(u_j''u_0'\right)$

$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 2n(2m + 1) + 2n + 2(2m + 1) + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 5}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right)$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 4nk + 2n + 4k - 3}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 5}{2}$$

$$= \frac{4(k^2 - m^2) + 4n(k - m) + 4(k - m) - 2n - 4m - 8}{2}$$

$$= 2(k^2 - m^2) + 2n(k - m) + 2(k - m) - n - 2m - 4$$

$$\geq 2(1) + 2(1)(1) + 2(1) - 1 - 2(0) - 4 = 1$$

∴ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right) > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*\left(u_j''u_0'\right)$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$.

4. Untuk n ganjil dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 2}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dengan $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k+1)^2 + 2n(2k+1) + 2n + 2(2k+1) - 2}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n + 1}{2}$$

a. Untuk j genap,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m \leq k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + (2m)^2 + 2n(2m) + 2n + 2(2m) + 1}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 1}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right)$$
$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n + 1}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 4nm + 2n + 4m + 1}{2}$$
$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 4n(m-k) + 4(m-k) + 4k + 2n}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 2n(m-k) + 2(m-k) + 2k + n$$
$$\geq 2(0) + 2(1)(0) + 2(0) + 2(1) + 1 = 3$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right) > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*\left(u_j''u_0'\right)$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$.

b. Untuk j ganjil,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + j^2 + 2nj + 2n + 2j + 2}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m < k$ dan $m \geq 0$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right)$$
$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 2n(2m+1) + 2n + 2(2m+1) + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 5}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right)$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8k + 4nk + 4n + 1}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 8m + 4nm + 4n + 5}{2}$$

$$= \frac{4(k^2 - m^2) + 4n(k - m) + 8(k - m) - 4}{2}$$

$$= 2(k^2 - m^2) + 2n(k - m) + 4(k - m) - 2$$

$$\geq 2(1) + 2(1)(1) + 4(1) - 2 = 6$$

∴ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right) > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*\left(u_j''u_0'\right)$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$.

∴ Terbukti bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$ untuk $i > j$.

∴ Karena telah terbukti bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$ untuk $i = j$, $i < j$ dan $i > j$, maka dapat disimpulkan bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$ untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$.

vii. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_j''u_0''\right)$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*\left(u_j''u_0''\right) > f^*(u_i''u_0'')$ dan $f^*\left(u_j'u_0'\right) > f^*(u_i'u_0')$ untuk $j > i$, dimana $1 \leq i, j \leq n$. Ini berarti $f^*\left(u_j''u_0''\right) > f^*(u_1''u_0'')$ untuk $j > 1$ dan $f^*(u_n'u_0') > f^*(u_i'u_0')$ untuk $j = n$. Sehingga untuk menunjukkan bahwa $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_j''u_0''\right)$, cukup dibuktikan bahwa $f^*(u_n'u_0') < f^*(u_1''u_0'')$.

Diketahui :

$$f^*(u_1''u_0'') = \begin{cases} \dfrac{n^2 + 4n}{2}, & n \text{ genap} \\ \dfrac{n^2 + 4n + 1}{2}, & n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Misalkan n suatu bilangan bulat sebarang, dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

1. Untuk $n = 1$,

   $f^*(u'_n u'_0) = 1$ dan $f^*(u''_1 u''_0) = 3$.

   Sehingga jelas bahwa $f^*(u'_n u'_0) < f^*(u''_1 u''_0)$.

2. Untuk $n > 1$,

   a. Untuk n genap,

   $$f^*(u'_n u'_0) = \frac{n^2 + 2n + 2}{2}$$

   Sehingga,

   $$f^*(u''_1 u''_0) - f^*(u'_n u'_0) = \frac{n^2 + 4n}{2} - \frac{n^2 + 2n + 2}{2} = \frac{2n - 2}{2}$$

   $$= n - 1 > 0$$

   $\therefore$ Karena $f^*(u''_1 u''_0) - f^*(u'_n u'_0) > 0$ maka, $f^*(u''_1 u''_0) > f^*(u'_n u'_0)$.

   b. Untuk n ganjil,

   $$f^*(u'_n u'_0) = \frac{n^2 + 2n + 1}{2}$$

   Sehingga,

   $$f^*(u''_1 u''_0) - f^*(u'_n u'_0) = \frac{n^2 + 4n + 1}{2} - \frac{n^2 + 2n + 1}{2} = \frac{2n}{2} = n > 1$$

   $\therefore$ Karena $f^*(u''_1 u''_0) - f^*(u'_n u'_0) > 0$ maka $f^*(u''_1 u''_0) > f^*(u'_n u'_0)$.

$\therefore$ Karena $f^*(u''_1 u''_0) > f^*(u'_n u'_0)$ maka dapat disimpulkan bahwa $f^*\left(u''_j u''_0\right) > f^*(u'_i u'_0)$. Ini berarti $f^*\left(u''_j u''_0\right) \neq f^*(u'_i u'_0)$ untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$.

viii. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u'_i u''_0) \neq f^*\left(u''_j u''_0\right) \forall i, j \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u'_i u''_0) < f^*\left(u'_j u'_0\right)$ untuk $i \leq j$ dimana $2 \leq i, j \leq n$ dan $f^*(u'_i u'_0) < f^*\left(u''_j u''_0\right)$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i, j \leq n$. Ini berarti $f^*(u'_n u''_0) < f^*(u'_n u'_0)$ dan $f^*(u'_n u'_0) < f^*(u''_1 u''_0)$. Maka $f^*(u'_n u''_0) < f^*(u''_1 u''_0)$. Artinya $f^*(u'_i u''_0) < f^*\left(u''_j u''_0\right)$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u'_i u''_0) \neq f^*\left(u''_j u''_0\right) \forall i, j \in \mathbb{Z}$.

ix. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u'_i u'_0) \neq f^*\left(u''_j u'_0\right) \forall i, j \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u'_i u'_0) < f^*\left(u''_j u''_0\right) \forall i, j \in \mathbb{Z}$ dan $f^*(u''_i u''_0) < f^*\left(u''_j u'_0\right)$ untuk $i \leq j$, dimana $1 \leq i, j \leq n$. Ini berarti

$f^*(u_n'u_0') < f^*(u_1''u_0'')$ dan $f^*(u_1''u_0'') < f^*(u_1''u_0')$. Maka $f^*(u_n'u_0') < f^*(u_1''u_0')$. Artinya $f^*(u_i'u_0') < f^*\left(u_j''u_0'\right)$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i, j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}$

x. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_i'u_0'') < f^*\left(u_j'u_0'\right)$ untuk $i \leq j$ dimana $2 \leq i, j \leq n$ dan $f^*(u_i'u_0') < f^*\left(u_j''u_0'\right)$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i, j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_n'u_0'') < f^*(u_n'u_0')$ dan $f^*(u_n'u_0') < f^*(u_1''u_0')$. Maka $f^*(u_n'u_0'') < f^*(u_1''u_0')$. Artinya $f^*(u_i'u_0'') < f^*\left(u_j''u_0'\right)$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i, j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}$.

Dari pemaparan di atas dapat disimpulkan bahwa berdasarkan pelabelan sisi f^* tidak ada dua sisi berbeda yang memperoleh label yang sama. Dengan demikian f adalah sebuah pelabelan *analytic mean* dan graf bayangan dari graf bintang $K_{1,n}$ adalah suatu graf *analytic mean*.

Untuk lebih memahami tentang graf bayangan dari graf bintang $K_{1,n}$ sebagai graf *analytic mean*, maka diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 3.3: Pilih graf bintang $K_{1,4}$ lalu operasikan dengan operasi graf bayangan. Maka diperoleh himpunan titik di graf bayangan dari graf bintang $K_{1,4}$ adalah $\{u_0', u_i', u_0'', u_i'' : 1 \leq i \leq 4\}$ dan himpunan sisinya adalah $\{u_0'u_i'', u_0'u_i', u_0''u_i'', u_0''u_i' : 1 \leq i \leq 4\}$. Dengan $p = 2n + 2 = 2(4) + 2 = 10$.

Maka pelabelan *analytic mean* $f: V\left(D_2(K_{1,4})\right) \rightarrow \{0,1,2, \ldots 9\}$ di graf bayangan dari graf bintang $K_{1,4}$ dengan $n = 4$ adalah sebagai berikut:

1. Pelabelan pada titik u_i':

$$f(u_i') = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ 1, & i = 1 \\ i + 1, & 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

$f(u_0') = 0$

$f(u_1') = 1$

$f(u_2') = 2 + 1 = 3$

$f(u_3') = 3 + 1 = 4$

$f(u_4') = 4 + 1 = 5$

2. Pelabelan pada titik u_i'':

$$f(u_i'') = \begin{cases} 2, & i = 0 \\ n + i + 1, & 1 \le i \le n \end{cases}$$

$f(u_0'') = 2$

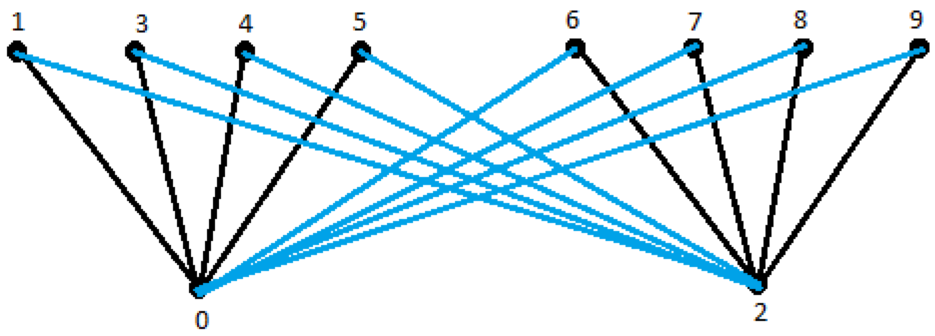
$f(u_1'') = 4 + 1 + 1 = 6$

$f(u_2'') = 4 + 2 + 1 = 7$

$f(u_3'') = 4 + 3 + 1 = 8$

$f(u_4'') = 4 + 4 + 1 = 9$

Sebagai ilustrasi, perhatikan Gambar 3.9 berikut.



Gambar 3.9 Pelabelan titik pada graf bayangan dari graf bintang $K_{1,4}$.

Sebagai akibat, akan diperoleh pelabelan sisi f^* yang bergantung pada f di graf bayangan dari graf bintang $K_{1,4}$ dimana $n = 4$, sebagai berikut.

1. Pelabelan pada sisi $u_i'u_0''$:

$$f^*(u_i'u_0'') = \begin{cases} 2, & \text{saat } i = 1 \\ \dfrac{i^2 + 2i - 2}{2}, & \text{saat } i \text{ genap} ; 2 \le i \le n \\ \dfrac{i^2 + 2i - 3}{2}, & \text{saat } i \text{ ganjil} ;\ 2 \le i \le n \end{cases}$$

$f^*(u_1'u_0'') = 2$

$$f^*(u_2'u_0'') = \frac{(2)^2 + 2(2) - 2}{2} = 3$$

$$f^*(u_3'u_0'') = \frac{(3)^2 + 2(3) - 3}{2} = 6$$

$$f^*(u_4'u_0'') = \frac{(4)^2 + 2(4) - 2}{2} = 11$$

2. Pelabelan pada sisi $u_i'u_0'$:

$$f^*(u_i'u_0') = \begin{cases} 1, & \text{saat } i = 1 \\ \dfrac{i^2 + 2i + 2}{2}, & \text{saat } i \text{ genap}\ ;\ 2 \leq i \leq n \\ \dfrac{i^2 + 2i + 1}{2}, & \text{saat } i \text{ ganjil}\ ;\ 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f^*(u_1'u_0') = 1$$

$$f^*(u_2'u_0') = \frac{(2)^2 + 2(2) + 2}{2} = 5$$

$$f^*(u_3'u_0') = \frac{(3)^2 + 2(3) + 1}{2} = 8$$

$$f^*(u_4'u_0') = \frac{(4)^2 + 2(4) + 2}{2} = 13$$

3. Pelabelan pada sisi $u_i''u_0''$:

$$f^*(u_i''u_0'') = \begin{cases} \dfrac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 2}{2}, & n + i \text{ genap}\ ;\ 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i - 3}{2}, & n + i \text{ ganjil}\ ;\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f^*(u_1''u_0'') = \frac{(4)^2 + (1)^2 + 2(4)(1) + 2(4) + 2(1) - 3}{2} = 16$$

$$f^*(u_2''u_0'') = \frac{(4)^2 + (2)^2 + 2(4)(2) + 2(4) + 2(2) - 2}{2} = 23$$

$$f^*(u_3''u_0'') = \frac{(4)^2 + (3)^2 + 2(4)(3) + 2(4) + 2(3) - 3}{2} = 30$$

$$f^*(u_4''u_0'') = \frac{(4)^2 + (4)^2 + 2(4)(4) + 2(4) + 2(4) - 2}{2} = 39$$

4. Pelabelan pada sisi $u_i''u_0'$:

$$f^*(u_i''u_0') = \begin{cases} \dfrac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 2}{2}, & n + i \text{ genap}\ ;\ 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{n^2 + i^2 + 2ni + 2n + 2i + 1}{2}, & n + i \text{ ganjil}\ ;\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

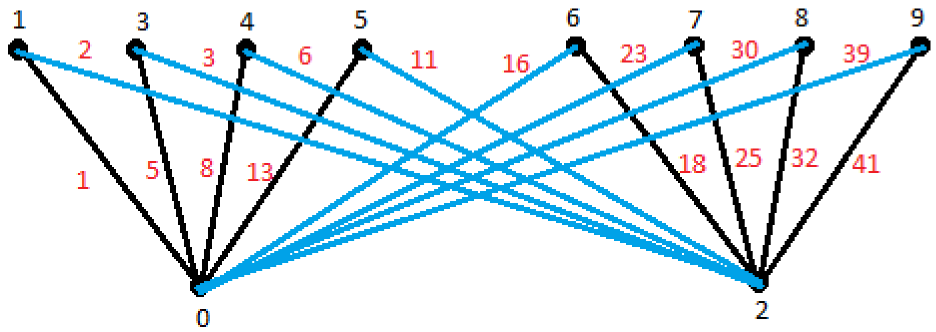
$$f^*(u_1''u_0') = \frac{(4)^2 + (1)^2 + 2(4)(1) + 2(4) + 2(1) + 1}{2} = 18$$

$$f^*(u_2''u_0') = \frac{(4)^2 + (2)^2 + 2(4)(2) + 2(4) + 2(2) + 2}{2} = 25$$

$$f^*(u_3''u_0') = \frac{(4)^2 + (3)^2 + 2(4)(3) + 2(4) + 2(3) + 1}{2} = 32$$

$$f^*(u_4''u_0') = \frac{(4)^2 + (4)^2 + 2(4)(4) + 2(4) + 2(4) + 2}{2} = 41$$

Sebagai ilustrasi, Gambar 3.10 menunjukan pelabelan *analytic mean* dan pelabelan sisi pada graf bayangan dari graf bintang $K_{1,4}$.



Gambar 3.10 Pelabelan *analytic mean* pada graf bayangan dari graf bintang $K_{1,4}$.

Berdasarkan pelabelan tersebut, setiap sisi yang ada di graf bayangan dari graf bintang $K_{1,4}$ memperoleh label sisi yang berbeda, sehingga graf bayangan dari graf bintang $K_{1,4}$ memenuhi pelabelan *analytic mean* $f: V\big(D_2(K_{1,4})\big) \rightarrow \{0,1,2,\dots 9\}$. Dengan demikian graf bayangan dari graf bintang $K_{1,4}$ adalah suatu graf *analytic mean*.

3.2.2 Pelabelan *Analytic Mean* pada Graf Bayangan dari Graf Bistar $B_{n,n}$

Teorema 3.2: Graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$ adalah suatu graf *analytic mean*, untuk $n > 0$.

Bukti : Untuk membuktikan bahwa graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$ adalah suatu graf *analytic mean*, maka harus ditunjukkan bahwa graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$ dapat dilabeli dengan pelabelan *analytic mean*, yaitu paling sedikit terdapat satu fungsi pelabelan titik f dari himpunan titik graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$ ke himpunan elemen yang berbeda dari $0,1,2,\dots p-1$, dimana p

adalah banyaknya titik di graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$ sedemikian sehingga dapat didefinisikan suatu pelabelan sisi f^* yang bergantung pada f, yaitu $f^*(e = uv) = \frac{|(f(u))^2-(f(v))^2|}{2}$ jika $|(f(u))^2 - (f(v))^2|$ adalah bilangan genap dan $f^*(e = uv) = \frac{|(f(u))^2-(f(v))^2|+1}{2}$ jika $|(f(u))^2 - (f(v))^2|$ adalah bilangan ganjil, dimana tidak ada dua sisi berbeda yang mendapat label yang sama.

Misalkan himpunan titik graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$ adalah sebagai berikut:

$$V\left(D_2(B_{n,n})\right) = \{u'_0, u'_i, u'_{10}, u'_{1i}, u''_0, u''_i, u''_{10}, u''_{1i} : 1 \leq i \leq n\}$$

Diketahui bahwa $p = \left|V\left(D_2(B_{n,n})\right)\right| = 4n + 4$.

Misalkan himpunan sisi graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$ adalah sebagai berikut:

$$E\left(D_2(B_{n,n})\right) = \{u'_iu''_0, u'_iu'_0, u''_iu''_0, u''_iu'_0, u'_{1i}u''_{10}, u'_{1i}u'_{10}, u''_{1i}u''_{10}, u''_{1i}u'_{10}, u'_0u'_{10}, u''_0u'_{10}, u''_0u''_{10}, u'_0u''_{10} : 1 \leq i \leq n\}$$

Didefinisikan pelabelan titik $f : V\left(D_2(B_{n,n})\right) \longrightarrow \{0,1,2 \dots, 4n + 3\}$ dengan,

$$f(u'_i) = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ i + 3, & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f(u''_i) = \begin{cases} 2, & i = 0 \\ n + i + 3, & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f(u'_{1i}) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 2n + i + 3, & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f(u''_{1i}) = \begin{cases} 3, & i = 0 \\ 3n + i + 3, & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Misalkan f^* adalah pelabelan sisi yang bergantung pada f, dimana f^* didefinisikan dengan :

$$f^*(e = uv) = \begin{cases} \frac{|(f(u))^2-(f(v))^2|}{2} & ;\text{jika} |(f(u))^2 - (f(v))^2| \text{adalah genap} \\ \frac{|(f(u))^2-(f(v))^2|+1}{2} & ;\text{jika} |(f(u))^2 - (f(v))^2| \text{adalah ganjil} \end{cases}$$

Maka,

Kasus 1. Untuk n ganjil, misalkan $n = 2l + 1$ untuk l suatu bilangan bulat, diperoleh label pada sisi-sisi di graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$ berdasarkan definisi f^* sebagai berikut:

1. Untuk sisi $e = u_i'u_0''$,

   $$|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| = |(i+3)^2 - (2)^2| = |i^2 + 6i + 9 - 4|$$
   $$= i^2 + 6i + 5$$

   Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| = (2k)^2 + 6(2k) + 5 = 4k^2 + 12k + 5 = 2(2k^2 + 6k + 2) + 1$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

   $$f^*(u_i'u_0'') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| + 1}{2} = \frac{i^2 + 6i + 5 + 1}{2}$$
   $$= \frac{i^2 + 6i + 6}{2}$$

   Jika i ganjil, misalkan $= 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| = (2k+1)^2 + 6(2k+1) + 5 = 4k^2 + 16k + 12 = 2(2k^2 + 8k + 6)$ adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

   $$f^*(u_i'u_0'') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2|}{2} = \frac{i^2 + 6i + 5}{2}$$

   $$f^*(u_i'u_0'') = \begin{cases} \dfrac{i^2 + 6i + 6}{2}, \text{jika } i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{i^2 + 6i + 5}{2}, \text{jika } i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n \end{cases}$$

2. Untuk sisi $e = u_i'u_0'$,

   $$|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| = |(i+3)^2 - (0)^2| = |i^2 + 6i + 9 - 0|$$
   $$= i^2 + 6i + 9$$

   Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| = (2k)^2 + 6(2k) + 9 = 4k^2 + 12k + 9 = 2(2k^2 + 6k + 4) + 1$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

   $$f^*(u_i'u_0') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| + 1}{2}$$

$$= \frac{i^2 + 6i + 9 + 1}{2} = \frac{i^2 + 6i + 10}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| = (2k + 1)^2 + 6(2k + 1) + 9 = 4k^2 + 16k + 16 = 2(2k^2 + 8k + 8)$ adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2|}{2} = \frac{i^2 + 6i + 9}{2}$$

$$\therefore f^*(u_i'u_0') = \begin{cases} \dfrac{i^2 + 6i + 10}{2}, \text{jika } i \text{ genap} ; 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{i^2 + 6i + 9}{2}, \text{jika } i \text{ ganjil} ; 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

3. Untuk sisi $e = u_i''u_0''$,

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2| = |(n + i + 3)^2 - (2)^2|$$
$$= |n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9 - 4|$$
$$= n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5$$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2|$$
$$= (2l + 1)^2 + (2k)^2 + 6(2l + 1) + 6(2k)$$
$$+ 2(2l + 1)(2k) + 5$$
$$= 4l^2 + 4k^2 + 8lk + 16l + 16k + 12$$
$$= 2(2l^2 + 2k^2 + 4lk + 8l + 8k + 6)$$

adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2|}{2} = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2|$$
$$= (2l + 1)^2 + (2k + 1)^2 + 6(2l + 1) + 6(2k + 1)$$
$$+ 2(2l + 1)(2k + 1) + 5$$
$$= 4l^2 + 4k^2 + 8lk + 20l + 20k + 21$$
$$= 2(2l^2 + 2k^2 + 4lk + 10l + 10k + 10) + 1$$

adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2| + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5 + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 6}{2}$$

$$\therefore f^*(u_i''u_0'') = \begin{cases} \dfrac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5}{2}, i \text{ genap} ; 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 6}{2}, i \text{ ganjil} ;\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

4. Untuk sisi $e = u_i''u_0'$,

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2| = |(n + i + 3)^2 - (0)^2|$$
$$= |n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9 - 0|$$
$$= n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9$$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2|$$
$$= (2l + 1)^2 + (2k)^2 + 6(2l + 1) + 6(2k)$$
$$+ 2(2l + 1)(2k) + 9$$
$$= 4l^2 + 4k^2 + 8lk + 16l + 16k + 16$$
$$= 2(2l^2 + 2k^2 + 4lk + 8l + 8k + 8)$$

adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2|}{2} = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2|$$
$$= (2l + 1)^2 + (2k + 1)^2 + 6(2l + 1) + 6(2k + 1)$$
$$+ 2(2l + 1)(2k + 1) + 9$$
$$= 4l^2 + 4k^2 + 8lk + 20l + 20k + 25$$
$$= 2(2l^2 + 2k^2 + 4lk + 10l + 10k + 12) + 1$$

adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2| + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9 + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2}$$

$$\therefore f^*(u_i''u_0') = \begin{cases} \dfrac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2} & , i \text{ genap} ; 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2} & , i \text{ ganjil} ;\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

5. Untuk sisi $e = u_{1i}'u_{10}''$,

$$|(f(u_{1i}'))^2 - (f(u_{10}''))^2| = |(2n + i + 3)^2 - (3)^2|$$
$$= |4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 9 - 9|$$
$$= 4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni$$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u_{1i}'))^2 - (f(u_{10}''))^2|$$
$$= 4(2l + 1)^2 + (2k)^2 + 12(2l + 1) + 6(2k)$$
$$+ 4(2l + 1)(2k)$$
$$= 16l^2 + 4k^2 + 16lk + 40l + 20k + 16$$
$$= 2(8l^2 + 2k^2 + 8lk + 20l + 10k + 8)$$

adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_{1i}'u_{10}'') = \frac{|(f(u_{1i}'))^2 - (f(u_{10}''))^2|}{2} = \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u_{1i}'))^2 - (f(u_{10}''))^2|$$
$$= 4(2l + 1)^2 + (2k + 1)^2 + 12(2l + 1) + 6(2k + 1)$$
$$+ 4(2l + 1)(2k + 1)$$
$$= 16l^2 + 4k^2 + 16lk + 48l + 24k + 27$$
$$= 2(8l^2 + 2k^2 + 8lk + 24l + 12k + 13) + 1$$

adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_{1i}'u_{10}'') = \frac{|(f(u_{1i}'))^2 - (f(u_{10}''))^2| + 1}{2}$$
$$= \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 1}{2}$$

$$\therefore f^*(u_{1i}'u_{10}'') = \begin{cases} \dfrac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni}{2} & , i \text{ genap} ; 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 1}{2} & , i \text{ ganjil} ;\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

6. Untuk sisi $e = u_{1i}'u_{10}'$,

$$|(f(u_{1i}'))^2 - (f(u_{10}'))^2| = |(2n + i + 3)^2 - (1)^2|$$

$$= |4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 9 - 1|$$
$$= 4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 8$$

Jika$i$ genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u'_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2|$$
$$= 4(2l + 1)^2 + (2k)^2 + 12(2l + 1) + 6(2k)$$
$$+ 4(2l + 1)(2k) + 8$$
$$= 16l^2 + 4k^2 + 16lk + 40l + 20k + 24$$
$$= 2(8l^2 + 2k^2 + 8lk + 20l + 10k + 12)$$

adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u'_{1i}u'_{10}) = \frac{|(f(u'_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2|}{2}$$
$$= \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 8}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u'_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2|$$
$$= 4(2l + 1)^2 + (2k + 1)^2 + 12(2l + 1) + 6(2k + 1)$$
$$+ 4(2l + 1)(2k + 1) + 8$$
$$= 16l^2 + 4k^2 + 16lk + 48l + 24k + 35$$
$$= 2(8l^2 + 2k^2 + 8lk + 24l + 12k + 17) + 1$$

adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u'_{1i}u'_{10}) = \frac{|(f(u'_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2| + 1}{2}$$
$$= \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 8 + 1}{2}$$
$$= \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 9}{2}$$

$$\therefore f^*(u'_{1i}u'_{10}) = \begin{cases} \dfrac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 8}{2}, i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 9}{2}, i \text{ ganjil} ;\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

7. Untuk sisi $e = u''_{1i}u''_{10}$,

$$|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u''_{10}))^2| = |(3n + i + 3)^2 - (3)^2|$$
$$= |9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 9 - 9|$$
$$= 9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni$$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u''_{10}))^2|$$
$$= 9(2l+1)^2 + (2k)^2 + 18(2l+1) + 6(2k)$$
$$+ 6(2l+1)(2k)$$
$$= 36l^2 + 4k^2 + 24lk + 72l + 24k + 27$$
$$= 2(18l^2 + 2k^2 + 12lk + 36l + 12k + 13) + 1$$

adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u''_{10}))^2| + 1}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 1}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k+1$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u''_{10}))^2|$$
$$= 9(2l+1)^2 + (2k+1)^2 + 18(2l+1) + 6(2k+1)$$
$$+ 6(2l+1)(2k+1)$$
$$= 36l^2 + 4k^2 + 24lk + 84l + 28k + 40$$
$$= 2(18l^2 + 2k^2 + 12lk + 42l + 14k + 20)$$

adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u''_{10}))^2|}{2} = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni}{2}$$

$$\therefore f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \begin{cases} \dfrac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 1}{2}, & i \text{ genap} ;\ 1 \le i \le n \\ \dfrac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni}{2}, & i \text{ ganjil} ;\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

8. Untuk sisi $e = u''_{1i}u'_{10}$,

$$|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2| = |(3n + i + 3)^2 - (1)^2|$$
$$= |9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 9 - 1|$$
$$= 9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 8$$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2|$$
$$= 9(2l+1)^2 + (2k)^2 + 18(2l+1) + 6(2k)$$
$$+ 6(2l+1)(2k) + 8$$
$$= 36l^2 + 4k^2 + 24lk + 72l + 24k + 35$$

$$= 2(18l^2 + 2k^2 + 12lk + 36l + 12k + 17) + 1$$

adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u''_{1i}u'_{10}) = \frac{|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2| + 1}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 8 + 1}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 9}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2|$$

$$= 9(2l + 1)^2 + (2k + 1)^2 + 18(2l + 1) + 6(2k + 1)$$

$$+ 6(2l + 1)(2k + 1) + 8$$

$$= 36l^2 + 4k^2 + 24lk + 84l + 28k + 48$$

$$= 2(18l^2 + 2k^2 + 12lk + 42l + 14k + 24)$$

adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u''_{1i}u'_{10}) = \frac{|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2|}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 8}{2}$$

$$\therefore f^*(u''_{1i}u'_{10}) = \begin{cases} \dfrac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 9}{2}, i \text{ genap}\ ; 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 8}{2}, i \text{ ganjil}\ ;\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

9. Untuk sisi $e = u'_0u'_{10}$,

   $|(f(u'_0))^2 - (f(u'_{10}))^2| = |(0)^2 - (1)^2| = 1$

   Karena $|(f(u'_0))^2 - (f(u'_{10}))^2| = 1$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

   $$f^*(u'_0u'_{10}) = \frac{|(f(u'_0))^2 - (f(u'_{10}))^2| + 1}{2} = \frac{1 + 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

   $\therefore f^*(u'_0u'_{10}) = 1$

10. Untuk sisi $e = u''_0u'_{10}$,

    $|(f(u''_0))^2 - (f(u'_{10}))^2| = |(2)^2 - (1)^2| = 4 - 1 = 3$

    Karena $|(f(u''_0))^2 - (f(u'_{10}))^2| = 3$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_0''u_{10}') = \frac{|(f(u_0''))^2 - (f(u_{10}'))^2| + 1}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$\therefore f^*(u_0''u_{10}') = 2$

11. Untuk sisi $e = u_0''u_{10}''$,

    $|(f(u_0''))^2 - (f(u_{10}''))^2| = |(2)^2 - (3)^2| = |4 - 9| = 5$

    Karena $|(f(u_0''))^2 - (f(u_{10}''))^2| = 5$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

    $$f^*(u_0''u_{10}'') = \frac{|(f(u_0''))^2 - (f(u_{10}''))^2| + 1}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

    $\therefore f^*(u_0''u_{10}'') = 3$

12. Untuk sisi $e = u_0'u_{10}''$,

    $|(f(u_0'))^2 - (f(u_{10}''))^2| = |(0)^2 - (3)^2| = 9$

    Karena $|(f(u_0'))^2 - (f(u_{10}''))^2| = 9$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

    $$f^*(u_0'u_{10}'') = \frac{|(f(u_0'))^2 - (f(u_{10}''))^2| + 1}{2} = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

    $\therefore f^*(u_0'u_{10}'') = 5$

Kasus 2. Untuk n genap, misalkan $n = 2l$ untuk l suatu bilangan bulat, diperoleh label pada sisi-sisi di graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$ berdasarkan definisi f^* sebagai berikut:

1. Untuk sisi $e = u_i'u_0''$,

    $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| = |(i+3)^2 - (2)^2| = |i^2 + 6i + 9 - 4|$

    $= i^2 + 6i + 5$

    Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| = (2k)^2 + 6(2k) + 5 = 4k^2 + 12k + 5 = 2(2k^2 + 6k + 2) + 1$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

    $$f^*(u_i'u_0'') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| + 1}{2} = \frac{i^2 + 6i + 5 + 1}{2}$$

    $$= \frac{i^2 + 6i + 6}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $= 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2| = (2k+1)^2 + 6(2k+1) + 5$
$= 4k^2 + 16k + 12 = 2(2k^2 + 8k + 6)$ adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0''))^2|}{2} = \frac{i^2 + 6i + 5}{2}$$

$$f^*(u_i'u_0'') = \begin{cases} \dfrac{i^2 + 6i + 6}{2}, \text{jika } i \text{ genap}; 1 \le i \le n \\ \dfrac{i^2 + 6i + 5}{2}, \text{jika } i \text{ ganjil}; 1 \le i \le n \end{cases}$$

2. Untuk sisi $e = u_i'u_0'$,

$$|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| = |(i+3)^2 - (0)^2| = |i^2 + 6i + 9 - 0|$$
$$= i^2 + 6i + 9$$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| = (2k)^2 + 6(2k) + 9 = 4k^2 + 12k + 9 = 2(2k^2 + 6k + 4) + 1$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| + 1}{2} = \frac{i^2 + 6i + 9 + 1}{2}$$
$$= \frac{i^2 + 6i + 10}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat maka $|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2| = (2k+1)^2 + 6(2k+1) + 9 = 4k^2 + 16k + 16 = 2(2k^2 + 8k + 8)$ adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{|(f(u_i'))^2 - (f(u_0'))^2|}{2} = \frac{i^2 + 6i + 9}{2}$$

$$\therefore f^*(u_i'u_0') = \begin{cases} \dfrac{i^2 + 6i + 10}{2}, \text{jika } i \text{ genap}; 1 \le i \le n \\ \dfrac{i^2 + 6i + 9}{2}, \text{jika } i \text{ ganjil}; 1 \le i \le n \end{cases}$$

3. Untuk sisi $e = u_i''u_0''$,

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2| = |(n + i + 3)^2 - (2)^2|$$
$$= |n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9 - 4|$$
$$= n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5$$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2|$$
$$= (2l)^2 + (2k)^2 + 6(2l) + 6(2k) + 2(2l)(2k) + 5$$
$$= 4l^2 + 4k^2 + 8lk + 12l + 12k + 5$$
$$= 2(2l^2 + 2k^2 + 4lk + 6l + 6k + 2) + 1$$

adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2| + 1}{2}$$
$$= \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5 + 1}{2}$$
$$= \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 6}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u''_0))^2|$$
$$= (2l)^2 + (2k+1)^2 + 6(2l) + 6(2k+1)$$
$$+ 2(2l)(2k+1) + 5$$
$$= 4l^2 + 4k^2 + 8lk + 16l + 16k + 12$$
$$= 2(2l^2 + 2k^2 + 4lk + 8l + 8k + 6)$$

adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0''))^2|}{2} = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5}{2}$$

$$\therefore f^*(u_i''u_0'') = \begin{cases} \dfrac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 6}{2}, i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5}{2}, i \text{ ganjil} ;\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

4. Untuk sisi $e = u_i''u_0'$,

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2| = |(n + i + 3)^2 - (0)^2|$$
$$= |n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9 - 0|$$
$$= n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9$$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2|$$
$$= (2l)^2 + (2k)^2 + 6(2l) + 6(2k) + 2(2l)(2k) + 9$$
$$= 4l^2 + 4k^2 + 8lk + 12l + 12k + 9$$
$$= 2(2l^2 + 2k^2 + 4lk + 6l + 6k + 4) + 1$$

adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2| + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9 + 1}{2}$$

$$= \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2|$$

$$= (2l)^2 + (2k + 1)^2 + 6(2l) + 6(2k + 1)$$

$$+ 2(2l)(2k + 1) + 9$$

$$= 4l^2 + 4k^2 + 8lk + 16l + 16k + 16$$

$$= 2(2l^2 + 2k^2 + 4lk + 8l + 8k + 8)$$

adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{|(f(u_i''))^2 - (f(u_0'))^2|}{2} = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2}$$

$$\therefore f^*(u_i''u_0') = \begin{cases} \dfrac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2}, i \text{ genap} ; 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2}, i \text{ ganjil} ;\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

5. Untuk sisi $e = u_{1i}'u_{10}''$,

$$|(f(u_{1i}'))^2 - (f(u_{10}''))^2| = |(2n + i + 3)^2 - (3)^2|$$

$$= |4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 9 - 9|$$

$$= 4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni$$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u_{1i}'))^2 - (f(u_{10}''))^2|$$

$$= 4(2l)^2 + (2k)^2 + 12(2l) + 6(2k) + 4(2l)(2k)$$

$$= 16l^2 + 4k^2 + 16lk + 24l + 12k$$

$$= 2(8l^2 + 2k^2 + 8lk + 12l + 6k)$$

adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u_{1i}'u_{10}'') = \frac{|(f(u_{1i}'))^2 - (f(u_{10}''))^2|}{2} = \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u'_{1i}))^2 - (f(u''_{10}))^2|$$
$$= 4(2l)^2 + (2k+1)^2 + 12(2l) + 6(2k+1)$$
$$+ 4(2l)(2k+1)$$
$$= 16l^2 + 4k^2 + 16lk + 32l + 16k + 7$$
$$= 2(8l^2 + 2k^2 + 8lk + 16l + 8k + 3) + 1$$

adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u'_{1i}u''_{10}) = \frac{|(f(u'_{1i}))^2 - (f(u''_{10}))^2| + 1}{2}$$
$$= \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 1}{2}$$

$$\therefore f^*(u'_{1i}u''_{10}) = \begin{cases} \dfrac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni}{2} & , i \text{ genap}\ ; 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 1}{2} & , i \text{ ganjil}\ ;\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

6. Untuk sisi $e = u'_{1i}u'_{10}$,

$$|(f(u'_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2| = |(2n + i + 3)^2 - (1)^2|$$
$$= |4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 9 - 1|$$
$$= 4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 8$$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u'_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2|$$
$$= 4(2l)^2 + (2k)^2 + 12(2l) + 6(2k) + 4(2l)(2k) + 8$$
$$= 16l^2 + 4k^2 + 16lk + 24l + 12k + 8$$
$$= 2(8l^2 + 2k^2 + 8lk + 12l + 6k + 4)$$

adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u'_{1i}u'_{10}) = \frac{|(f(u'_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2|}{2}$$
$$= \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 8}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u'_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2|$$
$$= 4(2l)^2 + (2k+1)^2 + 12(2l) + 6(2k+1)$$
$$+ 4(2l)(2k+1) + 8$$
$$= 16l^2 + 4k^2 + 16lk + 32l + 16k + 15$$
$$= 2(8l^2 + 2k^2 + 8lk + 16l + 8k + 7) + 1$$

adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u'_{1i}u'_{10}) = \frac{|(f(u'_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2| + 1}{2}$$

$$= \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 8 + 1}{2}$$

$$= \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 9}{2}$$

$$\therefore f^*(u'_{1i}u'_{10}) = \begin{cases} \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 8}{2}, i \text{ genap}\ ; 1 \le i \le n \\ \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 9}{2}, i \text{ ganjil}\ ;\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

7. Untuk sisi $e = u''_{1i}u''_{10}$,

$$|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u''_{10}))^2| = |(3n + i + 3)^2 - (3)^2|$$

$$= |9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 9 - 9|$$

$$= 9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni$$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u''_{10}))^2|$$

$$= 9(2l)^2 + (2k)^2 + 18(2l) + 6(2k) + 6(2l)(2k)$$

$$= 36l^2 + 4k^2 + 24lk + 36l + 12k$$

$$= 2(18l^2 + 2k^2 + 12lk + 18l + 6k)$$

adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u''_{10}))^2|}{2} = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k + 1$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u''_{10}))^2|$$

$$= 9(2l)^2 + (2k + 1)^2 + 18(2l) + 6(2k + 1)$$

$$+ 6(2l)(2k + 1)$$

$$= 36l^2 + 4k^2 + 24lk + 48l + 16k + 7$$

$$= 2(18l^2 + 2k^2 + 12lk + 24l + 8k + 3) + 1$$

adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u''_{10}))^2| + 1}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 1}{2}$$

$$\therefore f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \begin{cases} \dfrac{9n^2+i^2+18n+6i+6ni}{2}, & i \text{ genap}\ ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{9n^2+i^2+18n+6i+6ni+1}{2}, & i \text{ ganjil}\ ;\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

8. Untuk sisi $e = u''_{1i}u'_{10}$,

$$|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2| = |(3n+i+3)^2 - (1)^2|$$
$$= |9n^2+i^2+18n+6i+6ni+9-1|$$
$$= 9n^2+i^2+18n+6i+6ni+8$$

Jika i genap, misalkan $i = 2k$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2|$$
$$= 9(2l)^2 + (2k)^2 + 18(2l) + 6(2k) + 6(2l)(2k) + 8$$
$$= 36l^2 + 4k^2 + 24lk + 36l + 12k + 8$$
$$= 2(18l^2 + 2k^2 + 12lk + 18l + 6k + 4)$$

adalah suatu bilangan genap maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u''_{1i}u'_{10}) = \frac{|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2|}{2}$$
$$= \frac{9n^2+i^2+18n+6i+6ni+8}{2}$$

Jika i ganjil, misalkan $i = 2k+1$ untuk k suatu bilangan bulat maka:

$$|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2| = 9(2l)^2 + (2k+1)^2 + 18(2l) +$$
$$6(2k+1) + 6(2l)(2k+1) + 8$$
$$= 36l^2 + 4k^2 + 24lk + 48l + 16k + 15$$
$$= 2(18l^2 + 2k^2 + 12lk + 24l + 8k + 7) + 1$$

adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

$$f^*(u''_{1i}u'_{10}) = \frac{|(f(u''_{1i}))^2 - (f(u'_{10}))^2| + 1}{2}$$
$$= \frac{9n^2+i^2+18n+6i+6ni+8+1}{2}$$
$$= \frac{9n^2+i^2+18n+6i+6ni+9}{2}$$

$$\therefore f^*(u''_{1i}u'_{10}) = \begin{cases} \dfrac{9n^2+i^2+18n+6i+6ni+8}{2}, & i \text{ genap}\ ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{9n^2+i^2+18n+6i+6ni+9}{2}, & i \text{ ganjil}\ ;\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

9. Untuk sisi $e = u_0'u_{10}'$,

   $|(f(u_0'))^2 - (f(u_{10}'))^2| = |(0)^2 - (1)^2| = 1$

   Karena $|(f(u_0'))^2 - (f(u_{10}'))^2| = 1$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

   $$f^*(u_0'u_{10}') = \frac{|(f(u_0'))^2 - (f(u_{10}'))^2| + 1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

   $\therefore f^*(u_0'u_{10}') = 1$

10. Untuk sisi $e = u_0''u_{10}'$,

    $|(f(u_0''))^2 - (f(u_{10}'))^2| = |(2)^2 - (1)^2| = 4 - 1 = 3$

    Karena $|(f(u_0''))^2 - (f(u_{10}'))^2| = 3$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

    $$f^*(u_0''u_{10}') = \frac{|(f(u_0''))^2 - (f(u_{10}'))^2| + 1}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

    $\therefore f^*(u_0''u_{10}') = 2$

11. Untuk sisi $e = u_0''u_{10}''$,

    $|(f(u_0''))^2 - (f(u_{10}''))^2| = |(2)^2 - (3)^2| = |4 - 9| = 5$

    Karena $|(f(u_0''))^2 - (f(u_{10}''))^2| = 5$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

    $$f^*(u_0''u_{10}'') = \frac{|(f(u_0''))^2 - (f(u_{10}''))^2| + 1}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

    $\therefore f^*(u_0''u_{10}'') = 3$

12. Untuk sisi $e = u_0'u_{10}''$,

    $|(f(u_0'))^2 - (f(u_{10}''))^2| = |(0)^2 - (3)^2| = 9$

    Karena $|(f(u_0'))^2 - (f(u_{10}''))^2| = 9$ adalah suatu bilangan ganjil maka pelabelan sisinya adalah:

    $$f^*(u_0u_{10}') = \frac{|(f(u_0))^2 - (f(u_{10}'))^2| + 1}{2} = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

    $\therefore f^*(u_0u_{10}') = 5$

Kedua kasus pelabelan sisi diatas dapat diperumum sehingga diperoleh pelabelan sisi sebagai berikut.

$$f^*(u_i'u_0'') = \begin{cases} \dfrac{i^2+6i+6}{2}, \text{jika } i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{i^2+6i+5}{2}, \text{jika } i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n \end{cases}$$

$$f^*(u_i'u_0') = \begin{cases} \dfrac{i^2+6i+10}{2}, \text{jika } i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{i^2+6i+9}{2}, \text{jika } i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n \end{cases}$$

$$f^*(u_i''u_0'') = \begin{cases} \dfrac{n^2+i^2+6n+6i+2ni+6}{2}, n+i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{n^2+i^2+6n+6i+2ni+5}{2}, n+i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n \end{cases}$$

$$f^*(u_i''u_0') = \begin{cases} \dfrac{n^2+i^2+6n+6i+2ni+10}{2}, n+i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{n^2+i^2+6n+6i+2ni+9}{2}, n+i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n \end{cases}$$

$$f^*(u_{1i}'u_{10}'') = \begin{cases} \dfrac{4n^2+i^2+12n+6i+4ni}{2}, i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{4n^2+i^2+12n+6i+4ni+1}{2}, i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n \end{cases}$$

$$f^*(u_{1i}'u_{10}') = \begin{cases} \dfrac{4n^2+i^2+12n+6i+4ni+8}{2}, i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{4n^2+i^2+12n+6i+4ni+9}{2}, i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n \end{cases}$$

$$f^*(u_{1i}''u_{10}'') = \begin{cases} \dfrac{9n^2+i^2+18n+6i+6ni}{2}, n+i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{9n^2+i^2+18n+6i+6ni+1}{2}, n+i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n \end{cases}$$

$$f^*(u_{1i}''u_{10}') = \begin{cases} \dfrac{9n^2+i^2+18n+6i+6ni+8}{2}, n+i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{9n^2+i^2+18n+6i+6ni+9}{2}, n+i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n \end{cases}$$

$$f^*(u_0'u_{10}') = 1$$

$$f^*(u_0''u_{10}') = 2$$

$$f^*(u_0''u_{10}'') = 3$$

$f^*(u_0'u_{10}'') = 5$

Selanjutnya harus dibuktikan bahwa berdasarkan pelabelan sisi f^* di atas, tidak ada dua sisi berbeda yang memperoleh label yang sama.

Untuk membuktikan hal tersebut maka pelabelan sisi f^* harus memenuhi pernyataan-pernyataan berikut.

i. $i \neq j \Longrightarrow f^*(u_i'u_0'') \neq f^*\left(u_j'u_0''\right)$

ii. $i \neq j \Longrightarrow f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_j'u_0'\right)$

iii. $i \neq j \Longrightarrow f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0''\right)$

iv. $i \neq j \Longrightarrow f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$

v. $i \neq j \Longrightarrow f^*(u_{1i}'u_{10}'') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right)$

vi. $i \neq j \Longrightarrow f^*(u_{1i}'u_{10}') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right)$

vii. $i \neq j \Longrightarrow f^*(u_{1i}''u_{10}'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right)$

viii. $i \neq j \Longrightarrow f^*(u_{1i}''u_{10}') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right)$

ix. $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*\left(u_j'u_0'\right) \forall\ i,j \in \mathbb{Z}$

x. $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right) \forall\ i,j \in \mathbb{Z}$

xi. $f^*(u_{1i}'u_{10}'') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right) \forall\ i,j \in \mathbb{Z}$

xii. $f^*(u_{1i}''u_{10}'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j \in \mathbb{Z}$

xiii. $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_j''u_0''\right) \forall\ i,j \in \mathbb{Z}$

xiv. $f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall\ i,j \in \mathbb{Z}$

xv. $f^*(u_{1i}''u_{10}'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j \in \mathbb{Z}$

xvi. $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0''\right) \forall\ i,j \in \mathbb{Z}$

xvii. $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right) \forall\ i,j \in \mathbb{Z}$

xviii. $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right) \forall\ i,j \in \mathbb{Z}$

xix. $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right) \forall\ i,j \in \mathbb{Z}$

xx. $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall\ i,j \in \mathbb{Z}$

xxi. $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j \in \mathbb{Z}$

xxii. $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right) \forall\ i,j \in \mathbb{Z}$

xxiii. $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$

xxiv. $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$

xxv. $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$

xxvi. $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$

xxvii. $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$

xxviii. $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$

xxix. $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$

xxx. $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$

xxxi. $f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$

xxxii. $f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$

xxxiii. $f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$

xxxiv. $f^*(u_{1i}'u_{10}'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$

xxxv. $f^*(u_{1i}'u_{10}'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$

xxxvi. $f^*(u_{1i}'u_{10}') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$

Di bawah ini akan ditunjukkan bahwa pelabelan sisi f^* memenuhi pernyataan-pernyataan di atas.

i. Akan ditunjukkan bahwa jika $i \neq j$ maka $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*\left(u_j'u_0''\right)$. Cukup buktikan bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u_i'u_0'') < f^*\left(u_j'u_0''\right)$.

Bukti : Misalkan n adalah suatu bilangan bulat sebarang. Misalkan $i < j$, dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

1. Untuk i genap,

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{i^2 + 6i + 6}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{(2k)^2 + 6(2k) + 6}{2} = 2k^2 + 6k + 3$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) = \frac{j^2 + 6j + 6}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) = \frac{(2m)^2 + 6(2m) + 6}{2} = 2m^2 + 6m + 3$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) - f^*(u_i'u_0'') = 2m^2 + 6m + 3 - 2k^2 - 6k - 3$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k)$$
$$> 2(0) + 6(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u_j'u_0''\right) - f^*(u_i'u_0'') > 0$ maka $f^*\left(u_j'u_0''\right) > f^*(u_i'u_0'')$.

b. Jika j ganjl,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) = \frac{j^2 + 6j + 5}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) = \frac{(2m+1)^2 + 6(2m+1) + 5}{2} = \frac{4m^2 + 16m + 12}{2}$$
$$= 2m^2 + 8m + 6$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) - f^*(u_i'u_0'') = 2m^2 + 8m + 6 - 2k^2 - 6k - 3$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2m + 3$$
$$\geq 2(0) + 6(0) + 2(1) + 3 = 5$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u_j'u_0''\right) - f^*(u_i'u_0'') > 0$ maka $f^*\left(u_j'u_0''\right) > f^*(u_i'u_0'')$.

2. Untuk i ganjil,

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{i^2 + 6i + 5}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{(2k+1)^2 + 6(2k+1) + 5}{2} = \frac{4k^2 + 16k + 12}{2}$$
$$= 2k^2 + 8k + 6$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) = \frac{j^2 + 6j + 6}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j'u_0''\right) = \frac{(2m)^2 + 6(2m) + 6}{2} = 2m^2 + 6m + 3$$

Sehingga,

$$f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_i'u_0'') = 2m^2 + 6m + 3 - 2k^2 - 8k - 6$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) - 2k - 3$$
$$\geq 2(1) + 6(1) - 2(0) - 3 = 3$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_i'u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j'u_0'') > f^*(u_i'u_0'')$.

b. Jika j ganjl,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{j^2 + 6j + 5}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0'') = \frac{(2m+1)^2 + 6(2m+1) + 5}{2} = \frac{4m^2 + 16m + 12}{2}$$
$$= 2m^2 + 8m + 6$$

Sehingga,

$$f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_i'u_0'') = 2m^2 + 8m + 6 - 2k^2 - 8k - 6$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 8(m - k) > 2(0) + 8(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j'u_0'') - f^*(u_i'u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j'u_0'') > f^*(u_i'u_0'')$.

$\therefore$ Terbukti bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u_i'u_0'') < f^*(u_j'u_0'')$. Sehingga jika $i \neq j$ maka $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0'')$.

ii. Akan ditunjukkan bahwa jika $i \neq j$ maka $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j'u_0')$. Cukup buktikan bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u_i'u_0') < f^*(u_j'u_0')$.

Bukti: Misalkan n adalah suatu bilangan bulat sebarang. Misalkan $i < j$, dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

1. Untuk i genap,

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{i^2 + 6i + 10}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{(2k)^2 + 6(2k) + 10}{2} = 2k^2 + 6k + 5$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{j^2 + 6j + 10}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j'u_0'\right) = \frac{(2m)^2 + 6(2m) + 10}{2} = 2m^2 + 6m + 5$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} f^*\left(u_j'u_0'\right) - f^*(u_i'u_0') &= 2m^2 + 6m + 5 - 2k^2 - 6k - 5 \\ &= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) \\ &> 2(0) + 6(0) = 0 \end{aligned}$$

∴ Karena $f^*\left(u_j'u_0'\right) - f^*(u_i'u_0') > 0$ maka $f^*\left(u_j'u_0'\right) > f^*(u_i'u_0')$.

b. Jika *j* ganjl,

$$f^*\left(u_j'u_0'\right) = \frac{j^2 + 6j + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$\begin{aligned} f^*\left(u_j'u_0'\right) &= \frac{(2m+1)^2 + 6(2m+1) + 9}{2} \\ &= \frac{4m^2 + 16m + 18}{2} = 2m^2 + 8m + 8 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} f^*\left(u_j'u_0'\right) - f^*(u_i'u_0') &= 2m^2 + 8m + 8 - 2k^2 - 6k - 5 \\ &= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2m + 3 \\ &\geq 2(0) + 6(0) + 2(1) + 3 = 5 \end{aligned}$$

∴ Karena $f^*\left(u_j'u_0'\right) - f^*(u_i'u_0') > 0$ maka $f^*\left(u_j'u_0'\right) > f^*(u_i'u_0')$.

2. Untuk i ganjil,

$$f^*(u_i'u_0') = \frac{i^2 + 6i + 9}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$\begin{aligned} f^*(u_i'u_0') &= \frac{(2k+1)^2 + 6(2k+1) + 9}{2} = \frac{4k^2 + 16k + 16}{2} \\ &= 2k^2 + 8k + 8 \end{aligned}$$

a. Jika *j* genap,

$$f^*\left(u_j'u_0'\right) = \frac{j^2 + 6j + 10}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j'u_0'\right) = \frac{(2m)^2 + 6(2m) + 10}{2} = 2m^2 + 6m + 5$$

Sehingga,

$$f^*(u_j'u_0') - f^*(u_i'u_0') = 2m^2 + 6m + 5 - 2k^2 - 8k - 8$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) - 2k - 3$$
$$\geq 2(1) + 6(1) - 2(0) - 3 = 5$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j'u_0') - f^*(u_i'u_0') > 0$ maka $f^*(u_j'u_0') > f^*(u_i'u_0')$.

b. Jika j ganjl,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{j^2 + 6j + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{(2m+1)^2 + 6(2m+1) + 9}{2} = \frac{4m^2 + 16m + 18}{2}$$
$$= 2m^2 + 8m + 8$$

Sehingga,

$$f^*(u_j'u_0') - f^*(u_i'u_0') = 2m^2 + 8m + 8 - 2k^2 - 8k - 8$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 8(m - k) \geq 2(0) + 8(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j'u_0') - f^*(u_i'u_0') > 0$ maka $f^*(u_j'u_0') > f^*(u_i'u_0')$.

$\therefore$ Terbukti bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u_i'u_0') < f^*(u_j'u_0')$. Sehingga jika $i \neq j$ maka $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j'u_0')$.

iii. Akan ditunjukkan bahwa jika $i \neq j$ maka $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0'')$. Cukup dibuktikan bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u_i''u_0'') < f^*(u_j''u_0'')$.

Bukti: Misalkan n adalah suatu bilangan bulat sebarang. Misalkan $i < j$, dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

1. Untuk n genap dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 6}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 6n + 6(2k) + 2n(2k) + 6}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 6}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 6}{2}$$

Misalkan $i = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 6}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 6}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'')$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 6}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 6}{2}$$
$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m - k) + 4n(m - k)}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k)$$
$$> 2(0) + 6(0) + 2(0)(0) = 0$$

∴ Karena $f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*\left(u_j''u_0''\right) > f^*(u_i''u_0'')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 5}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right)$$
$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 6n + 6(2m + 1) + 2n(2m + 1) + 5}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 12}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'')$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 12}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 6}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m-k) + 4n(m-k) + 4m + 2n + 6}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m-k) + 2n(m-k) + 2m + n + 3$$

$$\geq 2(0) + 6(0) + 2(1)(0) + 2(1) + 1 + 3 = 5$$

∴ Karena $f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*\left(u_j''u_0''\right) > f^*(u_i''u_0'')$.

2. Untuk n genap dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k+1)^2 + 6n + 6(2k+1) + 2n(2k+1) + 5}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 12}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 6}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 6}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 6}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 6}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 12}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m-k) + 4n(m-k) - 4k - 2n - 6}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m-k) + 2n(m-k) - 2k - n - 3$$

$$\geq 2(1) + 6(1) + 2(1)(1) - 2(0) - 1 - 3 = 6$$

∴ Karena $f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*\left(u_j''u_0''\right) > f^*(u_i''u_0'')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 5}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0'')$$

$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 6n + 6(2m+1) + 2n(2m+1) + 5}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 12}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0'') - f^*(u_i''u_0'')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 12}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 12}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m-k) + 4n(m-k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m-k) + 2n(m-k)$$

$$> 2(0) + 6(0) + 2(0)(0) = 0$$

∴ Karena $f^*(u_j''u_0'') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0'') > f^*(u_i''u_0'')$.

3. Untuk n ganjil dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 6n + 6(2k) + 2n(2k) + 5}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 5}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j''u_0'') = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 5}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0'') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 5}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 5}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 5}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 5}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m - k) + 4n(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k)$$

$$> 2(0) + 6(0) + 2(0)(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*\left(u_j''u_0''\right) > f^*(u_i''u_0'')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 6}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right)$$

$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 6n + 6(2m + 1) + 2n(2m + 1) + 6}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 13}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 13}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 5}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m - k) + 4n(m - k) + 4m + 2n + 8}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k) + 2m + n + 4$$

$$\geq 2(0) + 6(0) + 2(1)(0) + 2(1) + 1 + 4 = 7$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u''_j u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*\left(u_j''u_0''\right) > f^*(u_i''u_0'')$.

4. Untuk n ganjil dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 6}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k+1)^2 + 6n + 6(2k+1) + 2n(2k+1) + 6}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 13}{2}$$

a. Jika *j* genap,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 5}{2}$$

Misalkan $j = 2m$, dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 5}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 5}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 5}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 13}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m-k) + 4n(m-k) - 4k - 2n - 8}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m-k) + 2n(m-k) - 2k - n - 4$$

$$\geq 2(1) + 6(1) + 2(1)(1) - 2(0) - 1 - 4 = 5$$

∴ Karena $f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*\left(u_j''u_0''\right) > f^*(u_i''u_0'')$.

b. Jika *j* ganjil,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right) = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 6}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0''\right)$$

$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 6n + 6(2m+1) + 2n(2m+1) + 6}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 13}{2}$$

Sehingga,

$f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 13}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 13}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 16(m - k) + 4n(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 8(m - k) + 2n(m - k)$$

$$> 2(0) + 8(0) + 2(0)(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u_j''u_0''\right) - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*\left(u_j''u_0''\right) > f^*(u_i''u_0'')$.

$\therefore$ Terbukti bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u_i''u_0'') < f^*\left(u_j''u_0''\right)$. Sehingga jika $i \neq j$ maka $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0''\right)$.

iv. Akan ditunjukkan bahwa jika $i \neq j$ maka $f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$. Cukup buktikan bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u_i''u_0') < f^*\left(u_j''u_0'\right)$.

Bukti: Misalkan n adalah suatu bilangan bulat sebarang. Misalkan $i < j$, dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

1. Untuk n genap dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 6n + 6(2k) + 2n(2k) + 10}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 10}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 10}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 10}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 10}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 10}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 10}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m - k) + 4n(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k) > 0$$

∴ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$f^*(u_j''u_0')$

$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 6n + 6(2m + 1) + 2n(2m + 1) + 9}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 16}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 16}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 10}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m - k) + 4n(m - k) + 4m + 2n + 6}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k) + 2m + n + 3$$

$$> 2(0) + 6(0) + 2(1)(0) + 2(1) + 1 + 3 = 6$$

∴ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0')$.

2. Untuk n genap dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + (2k+1)^2 + 6n + 6(2k+1) + 2n(2k+1) + 9}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 16}{2}$$

a. Jika *j* genap,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 10}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 10}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 10}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) - f^*(u_i''u_0')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 10}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 16}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m-k) + 4n(m-k) - 4k - 2n - 6}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m-k) + 2n(m-k) - 2k - n - 3$$

$$\geq 2(1) + 6(1) + 2(1)(1) - 2(0) - 1 - 3 = 6$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u_j''u_0'\right) - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*\left(u_j''u_0'\right) > f^*(u_i''u_0')$.

b. Jika *j* ganjil,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right)$$

$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 6n + 6(2m+1) + 2n(2m+1) + 9}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 16}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 16}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 16}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 16(m - k) + 4n(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 8(m - k) + 2n(m - k)$$

$$> 2(0) + 8(0) + 2(0)(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0')$.

3. Untuk n ganjil dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 6n + 6(2k) + 2n(2k) + 9}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 9}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 9}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 9}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 9}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 9}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m - k) + 4n(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k)$$

$$> 2(0) + 6(0) + 2(0)(0) = 0$$

∴ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 10}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0')$$

$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 6n + 6(2m + 1) + 2n(2m + 1) + 10}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 17}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 17}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 9}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m - k) + 4n(m - k) + 4m + 2n + 8}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k) + 2m + n + 4$$

$$\geq 2(0) + 6(0) + 2(1)(0) + 2(1) + 1 + 4 = 7$$

∴ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0')$.

4. Untuk n ganjil dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0') = \frac{n^2 + (2k + 1)^2 + 6n + 6(2k + 1) + 2n(2k + 1) + 10}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 17}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 9}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 9}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 9}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 17}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m - k) + 4n(m - k) - 4k - 2n - 8}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k) - 2k - n - 4$$

$$\geq 2(1) + 6(1) + 2(1)(1) - 2(0) - 1 - 4 = 5$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + j^2 + 6n + 6j + 2nj + 10}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0')$$

$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 6n + 6(2m + 1) + 2n(2m + 1) + 10}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 17}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 17}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 17}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 16(m - k) + 4n(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 8(m - k) + 2n(m - k)$$

$$> 2(0) + 8(0) + 2(0)(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0')$.

$\therefore$ Terbukti bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u_i''u_0') < f^*(u_j''u_0')$. Sehingga jika $i \neq j$ maka $f^*(u_i''u_0') \neq f^*(u_j''u_0')$.

v. Akan ditunjukkan bahwa jika $i \neq j$ maka $f^*(u_{1i}'u_{10}'') \neq f^*(u_{1j}'u_{10}'')$. Cukup dibuktikan bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u_{1i}'u_{10}'') < f^*(u_{1j}'u_{10}'')$.

Bukti: Misalkan n adalah suatu bilangan bulat sebarang. Misalkan $i < j$, dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

1. Untuk i genap,

$$f^*(u_{1i}'u_{10}'') = \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_{1i}'u_{10}'') = \frac{4n^2 + (2k)^2 + 12n + 6(2k) + 4n(2k)}{2}$$
$$= 2n^2 + 2k^2 + 6n + 6k + 4nk$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_{1j}'u_{10}'') = \frac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_{1j}'u_{10}'') = \frac{4n^2 + (2m)^2 + 12n + 6(2m) + 4n(2m)}{2}$$
$$= 2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm$$

Sehingga,

$$f^*(u_{1j}'u_{10}'') - f^*(u_{1i}'u_{10}'')$$
$$= 2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm$$
$$- (2n^2 + 2k^2 + 6n + 6k + 4nk)$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 4n(m - k)$$
$$> 2(0) + 6(0) + 2(0)(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_{1j}'u_{10}'') - f^*(u_{1i}'u_{10}'') > 0$ maka $f^*(u_{1j}'u_{10}'') > f^*(u_{1i}'u_{10}'')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u'_{1j}u''_{10}\right) = \frac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*\left(u'_{1j}u''_{10}\right)$$
$$= \frac{4n^2 + (2m+1)^2 + 12n + 6(2m+1) + 4n(2m+1) + 1}{2}$$
$$= \frac{4n^2 + 4m^2 + 16n + 16m + 8nm + 8}{2}$$
$$= 2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 4$$

Sehingga,

$$f^*\left(u'_{1j}u''_{10}\right) - f^*(u'_{1i}u''_{10})$$
$$= 2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 4 - (2n^2 + 2k^2 + 6n + 6k + 4nk)$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 4n(m - k) + 2m + 2n + 4$$
$$\geq 2(0) + 6(0) + 4(1)(0) + 2(1) + 2(1) + 4 = 8$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u'_{1j}u''_{10}\right) - f^*(u'_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u'_{1j}u''_{10}\right) > f^*(u'_{1i}u''_{10})$.

2. Untuk i ganjil,

$$f^*(u'_{1i}u''_{10}) = \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 1}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u'_{1i}u''_{10})$$
$$= \frac{4n^2 + (2k+1)^2 + 12n + 6(2k+1) + 4n(2k+1) + 1}{2}$$
$$= 2n^2 + 2k^2 + 8n + 8k + 4nk + 4$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u'_{1j}u''_{10}\right) = \frac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u'_{1j}u''_{10}\right) = \frac{4n^2 + (2m)^2 + 12n + 6(2m) + 4n(2m)}{2}$$
$$= 2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm$$

Sehingga,

$f^*(u'_{1j}u''_{10}) - f^*(u'_{1i}u''_{10})$

$$= 2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm - (2n^2 + 2k^2 + 8n + 8k + 4nk + 4)$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 4n(m - k) - 2k - 2n - 4$$

$$\geq 2(1) + 6(1) + 4(1)(1) - 2(0) - 2(1) - 4 = 6$$

∴ Karena $f^*(u'_{1j}u''_{10}) - f^*(u'_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*(u'_{1j}u''_{10}) > f^*(u'_{1i}u''_{10})$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u'_{1j}u''_{10}) = \frac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$f^*(u'_{1j}u''_{10})$

$$= \frac{4n^2 + (2m+1)^2 + 12n + 6(2m+1) + 4n(2m+1) + 1}{2}$$

$$= \frac{4n^2 + 4m^2 + 16n + 16m + 8nm + 8}{2}$$

$$= 2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 4$$

Sehingga,

$f^*(u'_{1j}u''_{10}) - f^*(u'_{1i}u''_{10})$

$$= 2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 4 - (2n^2 + 2k^2 + 8n + 8k + 4nk + 4)$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 4n(m - k)$$

$$> 2(0) + 6(0) + 4(0)(0) = 0$$

∴ Karena $f^*(u'_{1j}u''_{10}) - f^*(u'_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*(u'_{1j}u''_{10}) > f^*(u'_{1i}u''_{10})$.

∴ Terbukti bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u'_{1i}u''_{10}) < f^*(u'_{1j}u''_{10})$. Sehingga jika $i \neq j$ maka $f^*(u'_{1i}u''_{10}) \neq f^*(u'_{1j}u''_{10})$.

vi. Akan ditunjukkan bahwa jika $i \neq j$ maka $f^*(u'_{1i}u'_{10}) \neq f^*(u'_{1j}u'_{10})$. Cukup dibuktikan bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u'_{1i}u'_{10}) < f^*(u'_{1j}u'_{10})$.

Bukti: Misalkan n adalah suatu bilangan bulat sebarang. Misalkan $i < j$, dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

1. Untuk i genap,

$$f^*(u'_{1i}u'_{10}) = \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 8}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u'_{1i}u'_{10}) = \frac{4n^2 + (2k)^2 + 12n + 6(2k) + 4n(2k) + 8}{2}$$
$$= 2n^2 + 2k^2 + 6n + 6k + 4nk + 4$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) = \frac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) = \frac{4n^2 + (2m)^2 + 12n + 6(2m) + 4n(2m) + 8}{2}$$
$$= 2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm + 4$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} &f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u'_{1i}u'_{10}) \\ &\quad = 2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm + 4 \\ &\qquad\qquad - (2n^2 + 2k^2 + 6n + 6k + 4nk + 4) \\ &\quad = 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 4n(m - k) \\ &\quad > 2(0) + 6(0) + 2(0)(0) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u'_{1i}u'_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u'_{1i}u'_{10})$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) = \frac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$\begin{aligned} &f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) \\ &= \frac{4n^2 + (2m+1)^2 + 12n + 6(2m+1) + 4n(2m+1) + 9}{2} \\ &= \frac{4n^2 + 4m^2 + 16n + 16m + 8nm + 16}{2} \end{aligned}$$

$= 2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 8$

Sehingga,

$f^*(u'_{1j}u'_{10}) - f^*(u'_{1i}u'_{10})$

$= 2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 8$

$- (2n^2 + 2k^2 + 6n + 6k + 4nk + 4)$

$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 4n(m - k) + 2m + 2n + 4$

$\geq 2(0) + 6(0) + 4(1)(0) + 2(1) + 2(1) + 4 = 8$

$\therefore$ Karena $f^*(u'_{1j}u'_{10}) - f^*(u'_{1i}u'_{10}) > 0$ maka $f^*(u'_{1j}u'_{10}) > f^*(u'_{1i}u'_{10})$.

2. Untuk i ganjil,

$$f^*(u'_{1i}u'_{10}) = \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 9}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$f^*(u'_{1i}u'_{10})$

$$= \frac{4n^2 + (2k+1)^2 + 12n + 6(2k+1) + 4n(2k+1) + 9}{2}$$

$= 2n^2 + 2k^2 + 8n + 8k + 4nk + 8$

a. Jika j genap,

$$f^*(u'_{1j}u'_{10}) = \frac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u'_{1j}u'_{10}) = \frac{4n^2 + (2m)^2 + 12n + 6(2m) + 4n(2m) + 8}{2}$$

$= 2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm + 4$

Sehingga,

$f^*(u'_{1j}u'_{10}) - f^*(u'_{1i}u'_{10})$

$= 2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm + 4$

$- (2n^2 + 2k^2 + 8n + 8k + 4nk + 8)$

$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 4n(m - k) - 2k - 2n - 4$

$\geq 2(1) + 6(1) + 4(1)(1) - 2(0) - 2(1) - 4 = 6$

$\therefore$ Karena $f^*(u'_{1j}u'_{10}) - f^*(u'_{1i}u'_{10}) > 0$ maka $f^*(u'_{1j}u'_{10}) > f^*(u'_{1i}u'_{10})$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u'_{1j}u'_{10}) = \frac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*(u'_{1j}u'_{10})$$

$$= \frac{4n^2 + (2m+1)^2 + 12n + 6(2m+1) + 4n(2m+1) + 9}{2}$$

$$= \frac{4n^2 + 4m^2 + 16n + 16m + 8nm + 16}{2}$$

$$= 2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 8$$

Sehingga,

$$f^*(u'_{1j}u'_{10}) - f^*(u'_{1i}u'_{10})$$

$$= 2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 8 - (2n^2 + 2k^2 + 8n + 8k + 4nk + 8)$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m-k) + 4n(m-k)$$

$$> 2(0) + 6(0) + 4(0)(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u'_{1j}u'_{10}) - f^*(u'_{1i}u'_{10}) > 0$ maka $f^*(u'_{1j}u'_{10}) > f^*(u'_{1i}u'_{10})$.

$\therefore$ Terbukti bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u'_{1i}u'_{10}) < f^*(u'_{1j}u'_{10})$. Sehingga jika $i \neq j$ maka $f^*(u'_{1i}u'_{10}) \neq f^*(u'_{1j}u'_{10})$.

vii. Akan ditunjukkan bahwa jika $i \neq j$ maka $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*(u''_{1j}u''_{10})$. Cukup dibuktikan bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u''_{1i}u''_{10}) < f^*(u''_{1j}u''_{10})$.

Bukti: Misalkan n adalah suatu bilangan bulat sebarang. Misalkan $i < j$, dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

1. Untuk n genap dan i genap,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + (2k)^2 + 18n + 6(2k) + 6n(2k)}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)=\frac{9n^2+j^2+18n+6j+6nj}{2}$$

Misalkan $j=2m$ dimana $m>k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)=\frac{9n^2+(2m)^2+18n+6(2m)+6n(2m)}{2}$$

$$=\frac{9n^2+4m^2+18n+12m+12nm}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)-f^*(u''_{1i}u''_{10})$$

$$=\frac{9n^2+4m^2+18n+12m+12nm}{2}-\frac{9n^2+4k^2+18n+12k+12nk}{2}$$

$$=\frac{4(m^2-k^2)+12(m-k)+12n(m-k)}{2}$$

$$=2(m^2-k^2)+6(m-k)+6n(m-k)$$

$$>2(0)+6(0)+6(0)(0)=0$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)-f^*(u''_{1i}u''_{10})>0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)>f^*(u''_{1i}u''_{10})$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)=\frac{9n^2+j^2+18n+6j+6nj+1}{2}$$

Misalkan $j=2m+1$ dimana $m\geq k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)$$

$$=\frac{9n^2+(2m+1)^2+18n+6(2m+1)+6n(2m+1)+1}{2}$$

$$=\frac{9n^2+4m^2+24n+16m+12nm+8}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)-f^*(u''_{1i}u''_{10})$$

$$=\frac{9n^2+4m^2+24n+16m+12nm+8}{2}-\frac{9n^2+4k^2+18n+12k+12nk}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m - k) + 12n(m - k) + 4m + 6n + 8}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 6n(m - k) + 2m + 3n + 4$$

$$> 2(0) + 6(0) + 6(1)(0) + 2(1) + 3(1) + 4 = 9$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$.

2. Untuk n genap dan i ganjil,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 1}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + (2k + 1)^2 + 18n + 6(2k + 1) + 6n(2k + 1) + 1}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 8}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) = \frac{9n^2 + (2m)^2 + 18n + 6(2m) + 6n(2m)}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 8}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m - k) + 12n(m - k) - 4k - 6n - 8}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 6n(m - k) - 2k - 3n - 4$$

$$\geq 2(1) + 6(1) + 6(1)(1) - 2(0) - 3(1) - 4 = 7$$

∴ Karena $f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)$$
$$= \frac{9n^2 + (2m+1)^2 + 18n + 6(2m+1) + 6n(2m+1) + 1}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 8}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$$
$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 8}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 8}{2}$$
$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 16(m-k) + 12n(m-k)}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m-k) + 6n(m-k)$$
$$> 2(0) + 6(0) + 6(0)(0) = 0$$

∴ Karena $f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$.

3. Untuk n ganjil dan i genap,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 1}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + (2k)^2 + 18n + 6(2k) + 6n(2k) + 1}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk + 1}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) = \frac{9n^2 + (2m)^2 + 18n + 6(2m) + 6n(2m) + 1}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 1}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 1}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk + 1}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m - k) + 12n(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 6n(m - k)$$

$$> 2(0) + 6(0) + 6(0)(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$.

b. Jika *j* ganjil,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)$$

$$= \frac{9n^2 + (2m + 1)^2 + 18n + 6(2m + 1) + 6n(2m + 1)}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 7}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 7}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk + 1}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m - k) + 12n(m - k) + 4m + 6n + 6}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 6n(m - k) + 2m + 3n + 3$$

$$\geq 2(0) + 6(0) + 6(1)(0) + 2(1) + 3(1) + 3 = 8$$

∴ Karena $f^*(u''_{1j}u''_{10}) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*(u''_{1j}u''_{10}) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$.

4. Untuk n ganjil dan i ganjil,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + (2k+1)^2 + 18n + 6(2k+1) + 6n(2k+1)}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 7}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u''_{1j}u''_{10}) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 1}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u''_{1j}u''_{10}) = \frac{9n^2 + (2m)^2 + 18n + 6(2m) + 6n(2m) + 1}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 1}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u''_{1j}u''_{10}) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 1}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 7}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m-k) + 12n(m-k) - 4k - 6n - 6}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m-k) + 6n(m-k) - 2k - 3n - 3$$

$$\geq 2(1) + 6(1) + 6(1)(1) - 2(0) - 3(1) - 3 = 8$$

∴ Karena $f^*(u''_{1j}u''_{10}) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*(u''_{1j}u''_{10}) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u''_{1j}u''_{10}) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)$

$$= \frac{9n^2 + (2m + 1)^2 + 18n + 6(2m + 1) + 6n(2m + 1)}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 7}{2}$$

Sehingga,

$f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 7}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 7}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 16(m - k) + 12n(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 8(m - k) + 6n(m - k)$$

$$> 2(0) + 8(0) + 6(0)(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$.

$\therefore$ Terbukti bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u''_{1i}u''_{10}) < f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)$. Sehingga jika $i \neq j$ maka $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)$.

viii. Akan ditunjukkan bahwa jika $i \neq j$ maka $f^*(u''_{1i}u'_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$. Cukup dibuktikan bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u''_{1i}u'_{10}) < f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$.

Bukti: Misalkan n adalah suatu bilangan bulat sebarang. Misalkan $i < j$, dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

1. Untuk n genap dan i genap,

$$f^*(u''_{1i}u'_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 8}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u'_{10}) = \frac{9n^2 + (2k)^2 + 18n + 6(2k) + 6n(2k) + 8}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk + 8}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + (2m)^2 + 18n + 6(2m) + 6n(2m) + 8}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 8}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u'_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 8}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk + 8}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m - k) + 12n(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 6n(m - k)$$

$$> 2(0) + 6(0) + 6(0)(0) = 0$$

∴ Karena $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u'_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u'_{10})$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$$

$$= \frac{9n^2 + (2m + 1)^2 + 18n + 6(2m + 1) + 6n(2m + 1) + 9}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 16}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u'_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 16}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk + 8}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m-k) + 12n(m-k) + 4m + 6n + 8}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m-k) + 6n(m-k) + 2m + 3n + 4$$

$$> 2(0) + 6(0) + 6(1)(0) + 2(1) + 3(1) + 4 = 9$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u'_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u'_{10})$.

2. Untuk n genap dan i ganjil,

$$f^*(u''_{1i}u'_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 9}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u'_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + (2k+1)^2 + 18n + 6(2k+1) + 6n(2k+1) + 9}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 16}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + (2m)^2 + 18n + 6(2m) + 6n(2m) + 8}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 8}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u'_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 8}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 16}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m-k) + 12n(m-k) - 4k - 6n - 8}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m-k) + 6n(m-k) - 2k - 3n - 4$$

$$\geq 2(1) + 6(1) + 6(1)(1) - 2(0) - 3(1) - 4 = 7$$

∴ Karena $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u'_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u'_{10})$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$$
$$= \frac{9n^2 + (2m+1)^2 + 18n + 6(2m+1) + 6n(2m+1) + 9}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 16}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u'_{10})$$
$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 16}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 16}{2}$$
$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 16(m-k) + 12n(m-k)}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 8(m-k) + 6n(m-k)$$
$$> 2(0) + 8(0) + 6(0)(0) = 0$$

∴ Karena $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u'_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u'_{10})$.

3. Untuk n ganjil dan i genap,

$$f^*(u''_{1i}u'_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 9}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u'_{10}) = \frac{9n^2 + (2k)^2 + 18n + 6(2k) + 6n(2k) + 9}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk + 9}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10}) = \frac{9n^2 + (2m)^2 + 18n + 6(2m) + 6n(2m) + 9}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 9}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10}) - f^*(u''_{1i}u'_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 9}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk + 9}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m - k) + 12n(m - k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 6n(m - k)$$

$$> 2(0) + 6(0) + 6(0)(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u''_{1j}u'_{10}) - f^*(u''_{1i}u'_{10}) > 0$ maka $f^*(u''_{1j}u'_{10}) > f^*(u''_{1i}u'_{10})$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10}) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + (2m + 1)^2 + 18n + 6(2m + 1) + 6n(2m + 1) + 8}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 15}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10}) - f^*(u''_{1i}u'_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 15}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk + 9}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m - k) + 12n(m - k) + 4m + 6n + 6}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 6n(m - k) + 2m + 3n + 3$$

$$\geq 2(0) + 6(0) + 6(1)(0) + 2(1) + 3(1) + 3 = 8$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u'_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u'_{10})$.

4. Untuk n ganjil dan i ganjil,

$$f^*(u''_{1i}u'_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 8}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u'_{10})$$
$$= \frac{9n^2 + (2k+1)^2 + 18n + 6(2k+1) + 6n(2k+1) + 8}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 15}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + (2m)^2 + 18n + 6(2m) + 6n(2m) + 9}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 9}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u'_{10})$$
$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 9}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 15}{2}$$
$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 12(m-k) + 12n(m-k) - 4k - 6n - 6}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m-k) + 6n(m-k) - 2k - 3n - 3$$
$$\geq 2(1) + 6(1) + 6(1)(1) - 2(0) - 3(1) - 3 = 8$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u'_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u'_{10})$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$$

$$= \frac{9n^2 + (2m+1)^2 + 18n + 6(2m+1) + 6n(2m+1) + 8}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 15}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u'_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 15}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 15}{2}$$

$$= \frac{4(m^2 - k^2) + 16(m-k) + 12n(m-k)}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 8(m-k) + 6n(m-k)$$

$$> 2(0) + 8(0) + 6(0)(0) = 0$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u'_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u'_{10})$.

$\therefore$ Terbukti bahwa jika $i < j$ maka $f^*(u''_{1i}u'_{10}) < f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$. Sehingga jika $i \neq j$ maka $f^*(u''_{1i}u'_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$.

ix. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u'_iu''_0) \neq f^*\left(u'_ju'_0\right) \forall i,j \in \mathbb{Z}$.

Bukti : Misalkan n suatu bilangan bulat sebarang, dimana $1 \leq i,j \leq n$ dengan $i,j \in \mathbb{Z}$.

Kasus 1. Misalkan $i = j$

1. Untuk i genap,

$$f^*(u'_iu''_0) = \frac{i^2 + 6i + 6}{2} \text{ dan } f^*\left(u'_ju'_0\right) = \frac{i^2 + 6i + 10}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u'_ju'_0\right) - f^*(u'_iu''_0) = \frac{i^2 + 6i + 10}{2} - \frac{i^2 + 6i + 6}{2} = 2 > 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j'u_0') - f^*(u_i'u_0'') > 0$ maka, $f^*(u_j'u_0') > f^*(u_i'u_0'')$.
Artinya $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0')$.

2. Untuk i ganjil,

$f^*(u_i'u_0'') = \dfrac{i^2 + 6i + 5}{2}$ dan $f^*(u_j'u_0') = \dfrac{i^2 + 6i + 9}{2}$

Sehingga,

$$f^*(u_j'u_0') - f^*(u_i'u_0'') = \frac{i^2 + 6i + 9}{2} - \frac{i^2 + 6i + 5}{2} = 2 > 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j'u_0') - f^*(u_i'u_0'') > 0$ maka, $f^*(u_j'u_0') > f^*(u_i'u_0'')$.
Artinya $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0')$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0')$ untuk $i = j$.

Kasus 2. Misalkan $i < j$

1. Untuk i genap,

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{i^2 + 6i + 6}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{(2k)^2 + 6(2k) + 6}{2} = 2k^2 + 6k + 3$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{i^2 + 6i + 10}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{(2m)^2 + 6(2m) + 10}{2} = 2m^2 + 6m + 5$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} f^*(u_j'u_0') - f^*(u_i'u_0'') &= 2m^2 + 6m + 5 - 2k^2 + 6k + 3 \\ &= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2 \\ &> 2(0) + 6(0) + 2 = 2 \end{aligned}$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j'u_0') - f^*(u_i'u_0'') > 0$ maka, $f^*(u_j'u_0') > f^*(u_i'u_0'')$.
Artinya $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{i^2 + 6i + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{(2m+1)^2 + 6(2m+1) + 9}{2} = \frac{4m^2 + 16m + 16}{2}$$
$$= 2m^2 + 8m + 8$$

Sehingga,

$$f^*(u_j'u_0') - f^*(u_i'u_0'') = 2m^2 + 8m + 8 - 2k^2 + 6k + 3$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2m + 5$$
$$\geq 2(0) + 6(0) + 2(1) + 5 = 7$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j'u_0') - f^*(u_i'u_0'') > 0$ maka, $f^*(u_j'u_0') > f^*(u_i'u_0'')$. Artinya $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0')$.

2. Untuk i ganjil,

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{i^2 + 6i + 5}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{(2k+1)^2 + 6(2k+1) + 5}{2} = \frac{4k^2 + 16k + 12}{2}$$
$$= 2k^2 + 8k + 6$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{i^2 + 6i + 10}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{(2m)^2 + 6(2m) + 10}{2} = 2m^2 + 6m + 5$$

Sehingga,

$$f^*(u_j'u_0') - f^*(u_i'u_0'') = 2m^2 + 6m + 5 - 2k^2 - 8k - 6$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) - 2k - 1$$
$$\geq 2(1) + 6(1) - 2(0) - 1 = 7$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j'u_0') - f^*(u_i'u_0'') > 0$ maka, $f^*(u_j'u_0') > f^*(u_i'u_0'')$. Artinya $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{i^2 + 6i + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{(2m+1)^2 + 6(2m+1) + 9}{2} = \frac{4m^2 + 16m + 16}{2}$$
$$= 2m^2 + 8m + 8$$

Sehingga,

$$f^*(u_j'u_0') - f^*(u_i'u_0'') = 2m^2 + 8m + 8 - 2k^2 - 8k - 6$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 8(m - k) + 2$$
$$> 2(0) + 8(0) + 2 = 2$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j'u_0') - f^*(u_i'u_0'') > 0$ maka, $f^*(u_j'u_0') > f^*(u_i'u_0'')$. Artinya $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0')$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0')$ untuk $i < j$.

Kasus 3. Misalkan $i > j$

1. Untuk i genap,

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{i^2 + 6i + 6}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{(2k)^2 + 6(2k) + 6}{2} = 2k^2 + 6k + 3$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{i^2 + 6i + 10}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m < k$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{(2m)^2 + 6(2m) + 10}{2} = 2m^2 + 6m + 5$$

Sehingga,

$$f^*(u_i'u_0'') - f^*(u_j'u_0') = 2k^2 + 6k + 3 - 2m^2 - 6m - 5$$
$$= 2(k^2 - m^2) + 6(k - m) - 2$$
$$\geq 2(1) + 6(1) - 2 = 6$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i'u_0'') - f^*\left(u_j'u_0'\right) > 0$ maka, $f^*(u_i'u_0'') > f^*\left(u_j'u_0'\right)$.

Artinya $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*\left(u_j'u_0'\right)$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u_j'u_0'\right) = \frac{i^2 + 6i + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq 0$ dan $m < k$. Maka,

$$f^*\left(u_j'u_0'\right) = \frac{(2m+1)^2 + 6(2m+1) + 9}{2} = \frac{4m^2 + 16m + 16}{2}$$
$$= 2m^2 + 8m + 8$$

Sehingga,

$$f^*(u_i'u_0'') - f^*\left(u_j'u_0'\right) = 2k^2 + 6k + 3 - 2m^2 - 8m - 8$$
$$= 2(k^2 - m^2) + 6(k - m) - 2m - 5$$
$$\geq 2(1) + 6(1) - 2(0) - 5 = 3$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i'u_0'') - f^*\left(u_j'u_0'\right) > 0$ maka, $f^*(u_i'u_0'') > f^*\left(u_j'u_0'\right)$.

Artinya $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*\left(u_j'u_0'\right)$.

2. Untuk i ganjil,

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{i^2 + 6i + 5}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i'u_0'') = \frac{(2k+1)^2 + 6(2k+1) + 5}{2} = \frac{4k^2 + 16k + 12}{2}$$
$$= 2k^2 + 8k + 6$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u_j'u_0'\right) = \frac{i^2 + 6i + 10}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m \leq k$. Maka,

$$f^*\left(u_j'u_0'\right) = \frac{(2m)^2 + 6(2m) + 10}{2} = 2m^2 + 6m + 5$$

Sehingga,

$$f^*(u_i'u_0'') - f^*\left(u_j'u_0'\right) = 2k^2 + 8k + 6 - 2m^2 - 6m - 5$$
$$= 2(k^2 - m^2) + 6(k - m) + 2k + 1$$
$$\geq 2(0) + 6(0) + 2(1) + 1 = 3$$

∴ Karena $f^*(u_i'u_0'') - f^*(u_j'u_0') > 0$ maka, $f^*(u_i'u_0'') > f^*(u_j'u_0')$. Artinya $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{i^2 + 6i + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana$m \geq 0$ dan $m < k$. Maka,

$$f^*(u_j'u_0') = \frac{(2m+1)^2 + 6(2m+1) + 9}{2} = \frac{4m^2 + 16m + 16}{2}$$
$$= 2m^2 + 8m + 8$$

Sehingga,

$$f^*(u_i'u_0'') - f^*(u_j'u_0') = 2k^2 + 8k + 6 - 2m^2 - 8m - 8$$
$$= 2(k^2 - m^2) + 8(k - m) - 2$$
$$\geq 2(1) + 8(1) - 2 = 8$$

∴ Karena $f^*(u_i'u_0'') - f^*(u_j'u_0') > 0$ maka, $f^*(u_i'u_0'') > f^*(u_j'u_0')$. Artinya $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0')$.

∴ Terbukti bahwa $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0')$ untuk $i > j$.

∴ Karena telah terbukti bahwa $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0')$ untuk $i = j$, $i < j$ dan $i > j$, maka dapat disimpulkan bahwa $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_j'u_0')$ untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$.

x. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0') \; \forall i, j \in \mathbb{Z}$.

Bukti : Misalkan n suatu bilangan bulat sebarang, dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

Kasus 1. Misalkan $i = j$.

1. Untuk $n + i$ genap,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 6}{2}$$

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2} - \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 6}{2} = 2 > 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$.

Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

2. Untuk $n + i$ ganjil,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5}{2}$$

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2} - \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5}{2} = 2 > 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$.

Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$ untuk $i = j$.

Kasus 2. Misalkan $i < j$.

1. Untuk n genap dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 6}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 6n + 6(2k) + 2n(2k) + 6}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 6}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2}$$

Misalkan $i = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 10}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 10}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 10}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 6}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k) + 2$$
$$> 2(0) + 6(0) + 2(0)(0) + 2 = 2$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2}$$

Misalkan $i = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0')$$
$$= \frac{n^2 + (2m + 1)^2 + 6n + 6(2m + 1) + 2n(2m + 1) + 10}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 16}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 16}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 6}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k) + 2m + n + 5$$

$$\geq 2(0) + 6(0) + 2(0)(0) + 2(1) + 1 + 5 = 8$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

2. Untuk n genap dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k+1)^2 + 6n + 6(2k+1) + 2n(2k+1) + 5}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 12}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2}$$

Misalkan $i = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 10}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 10}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 10}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 12}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k) - 2k - n - 1$$
$$\geq 2(1) + 6(1) + 2(1)(1) - 2(0) - 1 - 1 = 8$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2}$$

Misalkan $i = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$f^*(u_j''u_0')$

$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 6n + 6(2m+1) + 2n(2m+1) + 10}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 16}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 16}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 12}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 8(m - k) + 2n(m - k) + 2$$

$$> 2(0) + 6(0) + 2(0)(0) + 2 = 2$$

∴ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

3. Untuk n ganjil dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 6n + 6(2k) + 2n(2k) + 5}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 5}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 9}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 9}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 9}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 5}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k) + 2$$

$$> 2(0) + 6(0) + 2(0)(0) + 2 = 2$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$f^*(u_j''u_0')$

$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 6n + 6(2m+1) + 2n(2m+1) + 10}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 17}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 17}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 5}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k) + 2m + n + 6$$

$$\geq 2(0) + 6(0) + 2(1)(0) + 2(1) + 1 + 6 = 9$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

4. Untuk n ganjil dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 6}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k+1)^2 + 6n + 6(2k+1) + 2n(2k+1) + 6}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 13}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 9}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 9}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 9}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 13}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m-k) + 2n(m-k) - 2k - n - 2$$
$$\geq 2(1) + 6(1) + 2(1)(1) - 2(0) - 1 - 2 = 7$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0')$$
$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 6n + 6(2m+1) + 2n(2m+1) + 10}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 17}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'')$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 17}{2} - \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 13}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 8(m - k) + 2n(m - k) + 2$$

$$> 2(0) + 6(0) + 2(0)(0) + 2 = 2$$

∴ Karena $f^*(u_j''u_0') - f^*(u_i''u_0'') > 0$ maka $f^*(u_j''u_0') > f^*(u_i''u_0'')$.

Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

∴ Terbukti bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$ untuk $i < j$.

Kasus 3. Misalkan $i > j$.

1. Untuk n genap dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 6}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 6n + 6(2k) + 2n(2k) + 6}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 6}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m < k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 10}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 10}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_i''u_0'') - f^*(u_j''u_0')$$
$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 6}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 10}{2}$$
$$= 2(k^2 - m^2) + 6(k - m) + 2n(k - m) - 2$$
$$\geq 2(1) + 6(1) + 2(1)(1) - 2 = 8$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*(u_j''u_0') > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*(u_j''u_0')$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m < k$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0')$$
$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 6n + 6(2m+1) + 2n(2m+1) + 10}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 16}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_i''u_0'') - f^*(u_j''u_0')$$
$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 6}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 16}{2}$$
$$= 2(k^2 - m^2) + 6(k - m) + 2n(k - m) - 2m - n - 5$$
$$\geq 2(1) + 6(1) + 2(1)(1) - 2(0) - 1 - 5 = 4$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*(u_j''u_0') > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*(u_j''u_0')$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

2. Untuk n genap dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k+1)^2 + 6n + 6(2k+1) + 2n(2k+1) + 5}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 12}{2}$$

a. Jika *j* genap,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2}$$

Misalkan $i = 2m$ dimana $m < k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 10}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 10}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right)$$
$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 12}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 10}{2}$$
$$= 2(k^2 - m^2) + 6(k-m) + 2n(k-m) + 2k + n + 1$$
$$> 2(0) + 6(0) + 2(0)(0) + 2(1) + 1 + 1 = 4$$

∴ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right) > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*\left(u_j''u_0'\right)$.

Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$.

b. Jika *j* ganjil,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m < k$ dan $m \geq 0$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right)$$
$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 6n + 6(2m+1) + 2n(2m+1) + 10}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 16}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right)$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 12}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 16}{2}$$

$$= 2(k^2 - m^2) + 8(k - m) + 2n(k - m) - 2$$

$$\geq 2(1) + 8(1) + 2(1)(1) - 2 = 10$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right) > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*\left(u_j''u_0'\right)$.

Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$.

3. Untuk n ganjil dan i genap,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k)^2 + 6n + 6(2k) + 2n(2k) + 5}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 5}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m < k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 9}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 9}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right)$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 5}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 9}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k) - 2$$

$$\geq 2(1) + 6(1) + 2(1)(1) - 2 = 8$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*(u_j''u_0') > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*(u_j''u_0')$.

Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m < k$ dan $m \geq 0$. Maka,

$$f^*(u_j''u_0')$$
$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 6n + 6(2m+1) + 2n(2m+1) + 10}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 17}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_i''u_0'') - f^*(u_j''u_0')$$
$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 6n + 12k + 4nk + 5}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 17}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k) - 2m - n - 6$$
$$\geq 2(1) + 6(1) + 2(1)(1) - 2(0) - 1 - 6 = 3$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*(u_j''u_0') > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*(u_j''u_0')$.

Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$.

4. Untuk n ganjil dan i ganjil,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 6}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u_i''u_0'') = \frac{n^2 + (2k+1)^2 + 6n + 6(2k+1) + 2n(2k+1) + 6}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 13}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u_j''u_0') = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m \leq k$. Maka,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + (2m)^2 + 6n + 6(2m) + 2n(2m) + 9}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 9}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right)$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 13}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 6n + 12m + 4nm + 9}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 2n(m - k) + 2k + n + 2$$

$$\geq 2(0) + 6(0) + 2(0)(0) + 2(1) + 1 + 2 = 5$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right) > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*\left(u_j''u_0'\right)$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u_j''u_0'\right) = \frac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m < k$ dan $m \geq 0$. Maka,

$f^*\left(u_j''u_0'\right)$

$$= \frac{n^2 + (2m+1)^2 + 6n + 6(2m+1) + 2n(2m+1) + 10}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 17}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right)$

$$= \frac{n^2 + 4k^2 + 8n + 16k + 4nk + 13}{2} - \frac{n^2 + 4m^2 + 8n + 16m + 4nm + 17}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 8(m - k) + 2n(m - k) - 2$$

$$\geq 2(1) + 8(1) + 2(1)(1) - 2 = 10$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_i''u_0'') - f^*\left(u_j''u_0'\right) > 0$ maka $f^*(u_i''u_0'') > f^*\left(u_j''u_0'\right)$. Ini berarti $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_j''u_0'\right)$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$ untuk $i > j$.

$\therefore$ Karena telah terbukti bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$ untuk $i = j$, $i < j$ dan $i > j$, maka dapat disimpulkan bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*(u_j''u_0')$ untuk setiap $1 \leq i,j \leq n$.

xi. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_{1i}'u_{10}'') \neq f^*(u_{1j}'u_{10}')$ $\forall i,j \in \mathbb{Z}$.

Bukti : Misalkan n suatu bilangan bulat sebarang, dimana $1 \leq i,j \leq n$ dengan $i,j \in \mathbb{Z}$.

Kasus 1. Misalkan $i = j$

1. Untuk i genap,

$$f^*(u_{1i}'u_{10}'') = \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni}{2}$$

$$f^*(u_{1j}'u_{10}') = \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 8}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_{1j}'u_{10}') - f^*(u_{1i}'u_{10}'')$$

$$= \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 8}{2} - \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni}{2} = 4$$

$\therefore$ Karena $f^*(u_{1j}'u_{10}') - f^*(u_{1i}'u_{10}'') > 0$ maka $f^*(u_{1j}'u_{10}') > f^*(u_{1i}'u_{10}'')$. Artinya $f^*(u_{1i}'u_{10}'') \neq f^*(u_{1j}'u_{10}')$.

2. Untuk i ganjil,

$$f^*(u_{1i}'u_{10}'') = \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 1}{2}$$

$$f^*(u_{1j}'u_{10}') = \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 9}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_{1j}'u_{10}') - f^*(u_{1i}'u_{10}'')$$

$$= \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 9}{2} - \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 1}{2} = 4$$

∴ Karena $f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u'_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u'_{1i}u''_{10})$. Artinya $f^*(u'_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$.

∴ Terbukti bahwa $f^*(u'_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$ untuk $i = j$

Kasus 2. Misalkan $i < j$

1. Untuk i genap,

$$f^*(u'_{1i}u''_{10}) = \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u'_{1i}u''_{10}) = \frac{4n^2 + (2k)^2 + 12n + 6(2k) + 4n(2k)}{2}$$
$$= 2n^2 + 2k^2 + 6n + 6k + 4nk$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) = \frac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) = \frac{4n^2 + (2m)^2 + 12n + 6(2m) + 4n(2m) + 8}{2}$$
$$= 2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm + 4$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u'_{1i}u''_{10}) \\ &= 2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm + 4 \\ &\quad - (2n^2 + 2k^2 + 6n + 6k + 4nk) \\ &= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 4n(m - k) + 4 \\ &> 2(0) + 6(0) + 4(0)(0) + 4 = 4 \end{aligned}$$

∴ Karena $f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u'_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u'_{1i}u''_{10})$. Artinya $f^*(u'_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) = \frac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$

$= \dfrac{4n^2 + (2m+1)^2 + 12n + 6(2m+1) + 4n(2m+1) + 9}{2}$

$= 2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 8$

Sehingga,

$f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u'_{1i}u''_{10})$

$= 2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 8$

$- (2n^2 + 2k^2 + 6n + 6k + 4nk)$

$= 2(m^2 - k^2) + 6(m-k) + 4n(m-k) + 2m + 2n + 8$

$\geq 2(0) + 6(0) + 4(1)(0) + 2(1) + 2(1) + 8 = 12$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u'_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u'_{1i}u''_{10})$. Artinya $f^*(u'_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$.

2. Untuk i ganjil,

$f^*(u'_{1i}u''_{10}) = \dfrac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 1}{2}$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$f^*(u'_{1i}u''_{10})$

$= \dfrac{4n^2 + (2k+1)^2 + 12n + 6(2k+1) + 4n(2k+1) + 1}{2}$

$= 2n^2 + 2k^2 + 8n + 8k + 4nk + 4$

a. Jika j genap,

$f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) = \dfrac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj + 8}{2}$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) = \dfrac{4n^2 + (2m)^2 + 12n + 6(2m) + 4n(2m) + 8}{2}$

$= 2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm + 4$

Sehingga,

$f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u'_{1i}u''_{10})$

$= 2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm + 4$

$- (2n^2 + 2k^2 + 8n + 8k + 4nk + 4)$

$= 2(m^2 - k^2) + 6(m-k) + 4n(m-k) - 2k - 2n$

$\geq 2(1) + 6(1) + 4(1)(1) - 2(0) - 2(1) = 10$

$\therefore$ Karena $f^*(u'_{1j}u'_{10}) - f^*(u'_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*(u'_{1j}u'_{10}) > f^*(u'_{1i}u''_{10})$. Artinya $f^*(u'_{1i}u''_{10}) \neq f^*(u'_{1j}u'_{10})$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u'_{1j}u'_{10}) = \frac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u'_{1j}u'_{10})$$
$$= \frac{4n^2 + (2m+1)^2 + 12n + 6(2m+1) + 4n(2m+1) + 9}{2}$$
$$= 2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 8$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} f^*(u'_{1j}u'_{10}) - f^*(u'_{1i}u''_{10}) \\ &= 2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 8 \\ &\quad - (2n^2 + 2k^2 + 8n + 8k + 4nk + 4) \\ &= 2(m^2 - k^2) + 8(m-k) + 4n(m-k) + 4 \\ &> 2(0) + 8(0) + 4(0)(0) + 4 = 4 \end{aligned}$$

$\therefore$ Karena $f^*(u'_{1j}u'_{10}) - f^*(u'_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*(u'_{1j}u'_{10}) > f^*(u'_{1i}u''_{10})$. Artinya $f^*(u'_{1i}u''_{10}) \neq f^*(u'_{1j}u'_{10})$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $f^*(u'_{1i}u''_{10}) \neq f^*(u'_{1j}u'_{10})$ untuk $i < j$

Kasus 3. Misalkan $i > j$

1. Untuk i genap,

$$f^*(u'_{1i}u''_{10}) = \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u'_{1i}u''_{10}) = \frac{4n^2 + (2k)^2 + 12n + 6(2k) + 4n(2k)}{2}$$
$$= 2n^2 + 2k^2 + 6n + 6k + 4nk$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u'_{1j}u'_{10}) = \frac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m < k$. Maka,

$$f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) = \frac{4n^2 + (2m)^2 + 12n + 6(2m) + 4n(2m) + 8}{2}$$
$$= 2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm + 4$$

Sehingga,

$$f^*(u'_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$$
$$= 2n^2 + 2k^2 + 6n + 6k + 4nk$$
$$- (2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm + 4)$$
$$= 2(k^2 - m^2) + 6(k - m) + 4n(k - m) - 4$$
$$\geq 2(1) + 6(1) + 4(1)(1) - 4 = 8$$

$\therefore$ Karena $f^*(u'_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) > 0$ maka $f^*(u'_{1i}u''_{10}) > f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$. Artinya $f^*(u'_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$.

b. Jika *j* ganjil,

$$f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) = \frac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m < k$ dan $m \geq 0$. Maka,

$$f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$$
$$= \frac{4n^2 + (2m+1)^2 + 12n + 6(2m+1) + 4n(2m+1) + 9}{2}$$
$$= 2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 8$$

Sehingga,

$$f^*(u'_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$$
$$= 2n^2 + 2k^2 + 6n + 6k + 4nk$$
$$- (2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 8)$$
$$= 2(k^2 - m^2) + 6(k - m) + 4n(k - m) - 2m - 2n - 8$$
$$\geq 2(1) + 6(1) + 4(1)(1) - 2(0) - 2(1) - 8 = 2$$

$\therefore$ Karena $f^*(u'_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) > 0$ maka $f^*(u'_{1i}u''_{10}) > f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$. Artinya $f^*(u'_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$.

2. Untuk i ganjil,

$$f^*(u'_{1i}u''_{10}) = \frac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 1}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$f^*(u'_{1i}u''_{10})$

$$= \frac{4n^2 + (2k+1)^2 + 12n + 6(2k+1) + 4n(2k+1) + 1}{2}$$

$= 2n^2 + 2k^2 + 8n + 8k + 4nk + 4$

a. Jika j genap,

$$f^*(u'_{1j}u'_{10}) = \frac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m \leq k$. Maka,

$$f^*(u'_{1j}u'_{10}) = \frac{4n^2 + (2m)^2 + 12n + 6(2m) + 4n(2m) + 8}{2}$$
$$= 2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm + 4$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} f^*(u'_{1i}u''_{10}) - f^*(u'_{1j}u'_{10}) &= 2n^2 + 2k^2 + 8n + 8k + 4nk + 4 \\ &\quad - (2n^2 + 2m^2 + 6n + 6m + 4nm + 4) \\ &= 2(k^2 - m^2) + 6(k - m) + 4n(k - m) + 2k + 2n \\ &\geq 2(0) + 6(0) + 4(1)(0) + 2(1) + 2(1) = 4 \end{aligned}$$

$\therefore$ Karena $f^*(u'_{1i}u''_{10}) - f^*(u'_{1j}u'_{10}) > 0$ maka $f^*(u'_{1i}u''_{10}) > f^*(u'_{1j}u'_{10})$. Artinya $f^*(u'_{1i}u''_{10}) \neq f^*(u'_{1j}u'_{10})$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u'_{1j}u'_{10}) = \frac{4n^2 + j^2 + 12n + 6j + 4nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m < k$ dan $m \geq 0$. Maka,

$f^*(u'_{1j}u'_{10})$

$$= \frac{4n^2 + (2m+1)^2 + 12n + 6(2m+1) + 4n(2m+1) + 9}{2}$$

$= 2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 8$

Sehingga,

$$\begin{aligned} f^*(u'_{1i}u''_{10}) - f^*(u'_{1j}u'_{10}) &= 2n^2 + 2k^2 + 8n + 8k + 4nk + 4 \\ &\quad - (2n^2 + 2m^2 + 8n + 8m + 4nm + 8) \\ &= 2(k^2 - m^2) + 8(k - m) + 4n(k - m) - 4 \\ &\geq 2(1) + 8(1) + 4(1)(1) - 4 = 10 \end{aligned}$$

$\therefore$ Karena $f^*(u'_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) > 0$ maka $f^*(u'_{1i}u''_{10}) > f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$. Artinya $f^*(u'_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $f^*(u'_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$ untuk $i > j$.

$\therefore$ Karena telah terbukti bahwa $f^*(u'_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$ untuk $i = j$, $i < j$ dan $i > j$, maka dapat disimpulkan bahwa $f^*(u'_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$ untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$.

xii. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)\ \forall i, j \in \mathbb{Z}$.

Bukti : Misalkan n suatu bilangan bulat sebarang, dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

Kasus 1. Misalkan $i = j$.

1. Untuk $n + i$ genap,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni}{2}$$

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 8}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 8}{2} - \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni}{2} = 4 > 0$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$.

2. Untuk $n + i$ ganjil,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 1}{2}$$

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 9}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u''_{1j}u'_{10}) - f^*(u'_{1i}u'_{10})$

$$= \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 9}{2} - \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 1}{2} = 4 > 0$$

∴ Karena $f^*(u''_{1j}u'_{10}) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*(u''_{1j}u'_{10}) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*(u''_{1j}u'_{10})$.

∴ Terbukti bahwa $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*(u''_{1j}u'_{10})$ untuk $i = j$.

Kasus 2. Misalkan $i < j$.

1. Untuk n genap dan i genap,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + (2k)^2 + 18n + 6(2k) + 6n(2k)}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10}) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10}) = \frac{9n^2 + (2m)^2 + 18n + 6(2m) + 6n(2m) + 8}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 8}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u''_{1j}u'_{10}) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 8}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 6n(m - k) + 4$$

$$> 2(0) + 6(0) + 6(0)(0) + 4 = 4$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$.

b. Jika *j* ganjil,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$$
$$= \frac{9n^2 + (2m+1)^2 + 18n + 6(2m+1) + 6n(2m+1) + 9}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 16}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$$
$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 16}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 6n(m - k) + 2m + 3n + 8$$
$$\geq 2(0) + 6(0) + 6(1)(0) + 2(1) + 3(1) + 8 = 13$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$.

2. Untuk n genap dan i ganjil,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 1}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10})$$
$$= \frac{9n^2 + (2k+1)^2 + 18n + 6(2k+1) + 6n(2k+1) + 1}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 8}{2}$$

a. Jika *j* genap,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10}) = \frac{9n^2 + (2m)^2 + 18n + 6(2m) + 6n(2m) + 8}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 8}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10}) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 8}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 8}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 6n(m - k) - 2k - 3n$$

$$\geq 2(1) + 6(1) + 6(1)(1) - 2(0) - 3(1) = 11$$

∴ Karena $f^*(u''_{1j}u'_{10}) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*(u''_{1j}u'_{10}) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*(u''_{1j}u'_{10})$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10}) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + (2m+1)^2 + 18n + 6(2m+1) + 6n(2m+1) + 9}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 16}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10}) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 16}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 8}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 6n(m - k) + 4$$

$$> 2(0) + 6(0) + 6(0)(0) + 4 = 4$$

∴ Karena $f^*(u''_{1j}u'_{10}) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*(u''_{1j}u'_{10}) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*(u''_{1j}u'_{10})$.

3. Untuk n ganjil dan i genap,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 1}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + (2k)^2 + 18n + 6(2k) + 6n(2k) + 1}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk + 1}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + (2m)^2 + 18n + 6(2m) + 6n(2m) + 9}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 9}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 9}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk + 1}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 6n(m - k) + 4$$

$$> 2(0) + 6(0) + 6(0)(0) + 4 = 4$$

$\therefore$ Karena $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m \geq k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$$

$$= \frac{9n^2 + (2m + 2)^2 + 18n + 6(2m + 1) + 6n(2m + 1) + 8}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 15}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u''_{1j}u'_{10}) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 15}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk + 1}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 6n(m - k) + 2m + 3n + 7$$

$$\geq 2(0) + 6(0) + 6(1)(0) + 2(1) + 3(1) + 7 = 12$$

$\therefore$ Karena $f^*(u''_{1j}u'_{10}) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*(u''_{1j}u'_{10}) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*(u''_{1j}u'_{10})$.

4. Untuk n ganjil dan i ganjil,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 0$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + (2k+1)^2 + 18n + 6(2k+1) + 6n(2k+1)}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 7}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10}) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10}) = \frac{9n^2 + (2m)^2 + 18n + 6(2m) + 6n(2m) + 9}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 9}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u''_{1j}u'_{10}) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 9}{2} - \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 7}{2}$$

$$= 2(m^2 - k^2) + 6(m - k) + 6n(m - k) - 2k - 3n + 1$$

$$\geq 2(1) + 6(1) + 6(1)(1) - 2(0) - 3(1) + 1 = 12$$

∴ Karena $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m > k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$$
$$= \frac{9n^2 + (2m+2)^2 + 18n + 6(2m+1) + 6n(2m+1) + 8}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 15}{2}$$

Sehingga,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10})$$
$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 15}{2}$$
$$- \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 7}{2}$$
$$= 2(m^2 - k^2) + 8(m - k) + 6n(m - k) + 4$$
$$> 2(0) + 8(0) + 6(0)(0) + 4 = 4$$

∴ Karena $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) - f^*(u''_{1i}u''_{10}) > 0$ maka $f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$.

∴ Terbukti bahwa $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$ untuk $i < j$

Kasus 3. Misalkan $i > j$

1. Untuk n genap dan i genap,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + (2k)^2 + 18n + 6(2k) + 6n(2k)}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)=\frac{9n^2+j^2+18n+6j+6nj+8}{2}$$

Misalkan $j=2m$ dimana $m<k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)=\frac{9n^2+(2m)^2+18n+6(2m)+6n(2m)+8}{2}$$

$$=\frac{9n^2+4m^2+18n+12m+12nm+8}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10})-f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$$

$$=\frac{9n^2+4k^2+18n+12k+12nk}{2}$$

$$-\frac{9n^2+4m^2+18n+12m+12nm+8}{2}$$

$$=2(k^2-m^2)+6(k-m)+6n(k-m)-4$$

$$\geq 2(1)+6(1)+6(1)(1)-4=10$$

∴ Karena $f^*(u''_{1i}u''_{10})-f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)>0$ maka $f^*(u''_{1i}u''_{10})>f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10})\neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)=\frac{9n^2+j^2+18n+6j+6nj+9}{2}$$

Misalkan $j=2m+1$ dimana $m<k$ dan $m\geq 0$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$$

$$=\frac{9n^2+(2m+1)^2+18n+6(2m+1)+6n(2m+1)+9}{2}$$

$$=\frac{9n^2+4m^2+24n+16m+12nm+16}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10})-f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$$

$$=\frac{9n^2+4k^2+18n+12k+12nk}{2}$$

$$-\frac{9n^2+4m^2+24n+16m+12nm+16}{2}$$

$$=2(k^2-m^2)+6(k-m)+6n(k-m)-2m-3n-8$$

$$\geq 2(1) + 6(1) + 6(1)(1) - 2(0) - 3(1) - 8 = 3$$

$\therefore$ Karena $f^*(u''_{1i}u''_{10}) - f^*(u''_{1j}u'_{10}) > 0$ maka $f^*(u''_{1i}u''_{10}) > f^*(u''_{1j}u'_{10})$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*(u''_{1j}u'_{10})$.

2. Untuk n genap dan i ganjil,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 1}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10})$$
$$= \frac{9n^2 + (2k+1)^2 + 18n + 6(2k+1) + 6n(2k+1) + 1}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 8}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10}) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m \leq k$. Maka,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10}) = \frac{9n^2 + (2m)^2 + 18n + 6(2m) + 6n(2m) + 8}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 8}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) - f^*(u''_{1j}u'_{10})$$
$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 8}{2} - \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 8}{2}$$
$$= 2(k^2 - m^2) + 6(k - m) + 6n(k - m) + 2k + 3n$$
$$\geq 2(0) + 6(0) + 6(1)(0) + 2(1) + 3(1) = 5$$

$\therefore$ Karena $f^*(u''_{1i}u''_{10}) - f^*(u''_{1j}u'_{10}) > 0$ maka $f^*(u''_{1i}u''_{10}) > f^*(u''_{1j}u'_{10})$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*(u''_{1j}u'_{10})$.

b. Jika j ganjil,

$$f^*(u''_{1j}u'_{10}) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m < k$ dan $m \geq 0$. Maka,

$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$

$$= \frac{9n^2 + (2m+1)^2 + 18n + 6(2m+1) + 6n(2m+1) + 9}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 16}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u''_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$

$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 8}{2}$$

$$- \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 16}{2}$$

$$= 2(k^2 - m^2) + 8(k - m) + 6n(k - m) - 8$$

$$\geq 2(1) + 8(1) + 6(1)(1) - 8 = 8$$

$\therefore$ Karena $f^*(u''_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > 0$ maka $f^*(u''_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$.

3. Untuk n ganjil dan i genap,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 1}{2}$$

Misalkan $i = 2k$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + (2k)^2 + 18n + 6(2k) + 6n(2k) + 1}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk + 1}{2}$$

a. Jika j genap,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m < k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + (2m)^2 + 18n + 6(2m) + 6n(2m) + 9}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 9}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u''_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$

$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk + 1}{2} - \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 9}{2}$$

$$= 2(k^2 - m^2) + 6(k - m) + 6n(k - m) - 4$$

$$\geq 2(1) + 6(1) + 6(1)(1) - 4 = 10$$

∴ Karena $f^*(u''_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > 0$ maka $f^*(u''_{1i}u''_{10}) > f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$.

b. Jika *j* ganjil,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m < k$ dan $m \geq 0$. Maka,

$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$

$$= \frac{9n^2 + (2m + 2)^2 + 18n + 6(2m + 1) + 6n(2m + 1) + 8}{2}$$

$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 15}{2}$$

Sehingga,

$f^*(u''_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$

$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 18n + 12k + 12nk + 1}{2} - \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 15}{2}$$

$$= 2(k^2 - m^2) + 6(k - m) + 6n(k - m) - 2m - 3n - 7$$

$$\geq 2(1) + 6(1) + 6(1)(1) - 2(0) - 3(1) - 7 = 4$$

∴ Karena $f^*(u''_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > 0$ maka $f^*(u''_{1i}u''_{10}) > f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$.

4. Untuk n ganjil dan i ganjil,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni}{2}$$

Misalkan $i = 2k + 1$ dimana $k \geq 1$. Maka,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) = \frac{9n^2 + (2k+1)^2 + 18n + 6(2k+1) + 6n(2k+1)}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 7}{2}$$

a. Jika *j* genap,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 9}{2}$$

Misalkan $j = 2m$ dimana $m \leq k$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + (2m)^2 + 18n + 6(2m) + 6n(2m) + 9}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 9}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$$
$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 7}{2} - \frac{9n^2 + 4m^2 + 18n + 12m + 12nm + 9}{2}$$
$$= 2(k^2 - m^2) + 6(k - m) + 6n(k - m) + 2k + 3n - 3$$
$$\geq 2(0) + 6(0) + 6(1)(0) + 2(1) + 3(1) - 3 = 2$$

∴ Karena $f^*(u''_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > 0$ maka $f^*(u''_{1i}u''_{10}) > f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$.

b. Jika *j* ganjil,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) = \frac{9n^2 + j^2 + 18n + 6j + 6nj + 8}{2}$$

Misalkan $j = 2m + 1$ dimana $m < k$ dan $m \geq 0$. Maka,

$$f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$$
$$= \frac{9n^2 + (2m+2)^2 + 18n + 6(2m+1) + 6n(2m+1) + 8}{2}$$
$$= \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 15}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u''_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$$

$$= \frac{9n^2 + 4k^2 + 24n + 16k + 12nk + 7}{2} - \frac{9n^2 + 4m^2 + 24n + 16m + 12nm + 15}{2}$$

$$= 2(k^2 - m^2) + 8(k - m) + 6n(k - m) - 4$$

$$\geq 2(1) + 8(1) + 6(1)(1) - 4 = 12$$

$\therefore$ Karena $f^*(u''_{1i}u''_{10}) - f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) > 0$ maka $f^*(u''_{1i}u''_{10}) > f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$. Artinya $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$ untuk $i > j$.

$\therefore$ Karena telah terbukti bahwa $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$ untuk $i > j$, $i > j$ dan $i > j$, maka dapat disimpulkan bahwa $f^*(u''_{1i}u''_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$ untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$.

xiii. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u'_iu'_0) \neq f^*\left(u''_ju''_0\right)$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}$.

Bukti : Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*\left(u''_ju''_0\right) > f^*(u''_iu''_0)$ dan $f^*\left(u'_ju'_0\right) > f^*(u'_iu'_0)$ untuk $i < j$, dimana $1 \leq i, j \leq n$. Ini berarti $f^*\left(u''_ju''_0\right) > f^*(u''_1u''_0)$ untuk $1 < j$ dan $f^*(u'_nu'_0) > f^*(u'_iu'_0)$ untuk $j = n$. Sehingga untuk menunjukkan bahwa $f^*(u'_iu'_0) \neq f^*\left(u''_ju''_0\right)$, cukup dibuktikan bahwa $f^*(u'_nu'_0) < f^*(u''_1u''_0)$.

Diketahui :

$$f^*(u''_1u''_0) = \begin{cases} \dfrac{n^2 + 8n + 12}{2}, n \text{ genap} \\ \dfrac{n^2 + 8n + 13}{2}, n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Misalkan n suatu bilangan bulat sebarang, dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$.

1. Untuk n genap,

$$f^*(u'_nu'_0) = \frac{n^2 + 6n + 10}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_1''u_0'') - f^*(u_n'u_0') = \frac{n^2+8n+12}{2} - \frac{n^2+6n+10}{2} = n+1$$
$$> 1$$

∴ Karena $f^*(u_1''u_0'') - f^*(u_n'u_0') > 0$ maka, $f^*(u_1''u_0'') > f^*(u_n'u_0')$.

2. Untuk n ganjil,

$$f^*(u_n'u_0') = \frac{n^2+6n+9}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u_1''u_0'') - f^*(u_n'u_0') = \frac{n^2+8n+13}{2} - \frac{n^2+6n+9}{2} = n+2 > 2$$

∴ Karena $f^*(u_1''u_0'') - f^*(u_n'u_0') > 0$ maka, $f^*(u_1''u_0'') > f^*(u_n'u_0')$.

∴ Karena $f^*(u_1''u_0'') > f^*(u_n'u_0')$ maka dapat disimpulkan bahwa $f^*\left(u_j''u_0''\right) > f^*(u_i'u_0')$. Ini berarti $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_j''u_0''\right)$ untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$.

xiv. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right)$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}$.

Bukti : Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right) > f^*(u_{1i}'u_{10}'')$ dan $f^*\left(u_j''u_0'\right) > f^*(u_i''u_0')$ untuk $i < j$, dimana $1 \leq i, j \leq n$. Ini berarti $f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right) > f^*(u_{11}'u_{10}'')$ untuk $1 < j$ dan $f^*(u_n''u_0') > f^*(u_i''u_0')$ untuk $j = n$. Sehingga untuk menunjukkan bahwa $f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right)$, cukup dibuktikan bahwa $f^*(u_n''u_0') < f^*(u_{11}'u_{10}'')$.

Misalkan n suatu bilangan bulat sebarang, dimana $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i, j \in \mathbb{Z}$. Maka,

$f^*(u_n''u_0') = 2n^2 + 6n + 5$ dan $f^*(u_{11}'u_{10}'') = 2n^2 + 8n + 4$

Sehingga,

$$f^*(u_{11}'u_{10}'') - f^*(u_n''u_0') = 2n^2 + 8n + 4 - 2n^2 - 6n - 5 = 2n - 1 \geq 1$$

∴ Karena $f^*(u_{11}'u_{10}'') - f^*(u_n''u_0') > 0$ maka $f^*(u_{11}'u_{10}'') > f^*(u_n''u_0')$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right) > f^*(u_i''u_0')$. Artinya $f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right)$ untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$.

xv. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u'_{1i}u'_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)$ $\forall i,j \in \mathbb{Z}$.

Bukti : Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) > f^*(u''_{1i}u''_{10})$ dan $f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) > f^*(u'_{1i}u'_{10})$ untuk $i < j$, dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) > f^*(u''_{11}u''_{10})$ untuk $1 < j$ dan $f^*(u'_{1n}u'_{10}) > f^*(u'_{1i}u'_{10})$ untuk $j = n$. Sehingga untuk menunjukkan bahwa $f^*(u'_{1i}u'_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)$, cukup dibuktikan bahwa $f^*(u'_{1n}u'_{10}) < f^*(u''_{11}u''_{10})$.

Diketahui :

$$f^*(u''_{11}u''_{10}) = \begin{cases} \dfrac{9n^2 + 24n + 8}{2}, n \text{ genap} \\ \dfrac{9n^2 + 24n + 7}{2}, n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Misalkan n suatu bilangan bulat sebarang, dimana $1 \leq i,j \leq n$ dengan $i,j \in \mathbb{Z}$.

1. Untuk n genap,

$$f^*(u'_{1n}u'_{10}) = \frac{9n^2 + 18n + 8}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u''_{11}u''_{10}) - f^*(u'_{1n}u'_{10}) = \frac{9n^2 + 24n + 8}{2} - \frac{9n^2 + 18n + 8}{2}$$
$$= 3n > 0$$

$\therefore$ Karena $f^*(u''_{11}u''_{10}) - f^*(u'_{1n}u'_{10}) > 0$ maka $f^*(u''_{11}u''_{10}) > f^*(u'_{1n}u'_{10})$.

2. Untuk n ganjil,

$$f^*(u'_{1n}u'_{10}) = \frac{9n^2 + 18n + 9}{2}$$

Sehingga,

$$f^*(u''_{11}u''_{10}) - f^*(u'_{1n}u'_{10}) = \frac{9n^2 + 24n + 7}{2} - \frac{9n^2 + 18n + 9}{2} \geq 2$$

$\therefore$ Karena $f^*(u''_{11}u''_{10}) - f^*(u'_{1n}u'_{10}) > 0$ maka $f^*(u''_{11}u''_{10}) > f^*(u'_{1n}u'_{10})$.

$\therefore$ Karena telah terbukti $f^*(u''_{11}u''_{10}) > f^*(u'_{1n}u'_{10})$ maka dapat disimpulkan bahwa $f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right) > f^*(u'_{1i}u'_{10})$. Ini berarti $f^*(u'_{1i}u'_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)$ untuk setiap $1 \leq i,j \leq n$.

xvi. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u'_iu''_0) \neq f^*\left(u''_ju''_0\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u'_iu''_0) < f^*\left(u'_ju'_0\right)$ untuk $i \leq j$ dan $f^*(u'_iu'_0) < f^*\left(u''_ju''_0\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u'_nu''_0) < f^*(u'_nu'_0)$ dan $f^*(u'_nu'_0) < f^*(u''_1u''_0)$. Maka $f^*(u'_nu''_0) < f^*(u''_1u''_0)$. Artinya $f^*(u'_iu''_0) < f^*\left(u''_ju''_0\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u'_iu''_0) \neq f^*\left(u''_ju''_0\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

xvii. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u'_iu''_0) \neq f^*\left(u''_ju'_0\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u'_iu''_0) < f^*\left(u''_ju''_0\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$ dan $f^*(u''_iu''_0) < f^*\left(u''_ju'_0\right)$ untuk $i \leq j$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u'_nu''_0) < f^*(u''_1u''_0)$ dan $f^*(u''_1u''_0) < f^*(u''_1u'_0)$. Maka $f^*(u'_nu''_0) < f^*(u''_1u'_0)$. Artinya $f^*(u'_iu''_0) < f^*\left(u''_ju'_0\right)\ \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u'_iu''_0) \neq f^*\left(u''_ju'_0\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

xviii. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u'_iu''_0) \neq f^*\left(u'_{1j}u''_{10}\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u'_iu''_0) < f^*\left(u''_ju'_0\right)$ dan $f^*(u''_iu'_0) < f^*\left(u'_{1j}u''_{10}\right)\ \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u'_nu''_0) < f^*(u''_1u'_0)$ dan $f^*(u''_1u'_0) < f^*(u'_{11}u''_{10})$. Maka $f^*(u'_nu''_0) < f^*(u'_{11}u''_{10})$. Artinya $f^*(u'_iu''_0) < f^*\left(u'_{1j}u''_{10}\right)\ \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u'_iu''_0) \neq f^*\left(u'_{1j}u''_{10}\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

xix. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u'_iu''_0) \neq f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u'_iu''_0) < f^*\left(u'_{1j}u''_{10}\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$ dan $f^*(u'_{1i}u''_{10}) < f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)$ untuk $i \leq j$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u'_nu''_0) < f^*(u'_{11}u''_{10})$ dan $f^*(u'_{11}u''_{10}) < f^*(u'_{11}u'_{10})$. Maka $f^*(u'_nu''_0) < f^*(u'_{11}u'_{10})$. Artinya $f^*(u'_iu''_0) < f^*\left(u'_{1j}u'_{10}\right)\ \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$

dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_{1j}'u_{10}') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$.

xx. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_{1j}''u_{10}'') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_i'u_0'') < f^*(u_{1j}'u_{10}')$ dan $f^*(u_{1i}'u_{10}') < f^*(u_{1j}''u_{10}'') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_n'u_0'') < f^*(u_{11}'u_{10}')$ dan $f^*(u_{11}'u_{10}') < f^*(u_{11}''u_{10}'')$. Maka $f^*(u_n'u_0'') < f^*(u_{11}''u_{10}'')$. Artinya $f^*(u_i'u_0'') < f^*(u_{1j}''u_{10}'') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_{1j}''u_{10}'') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$.

xxi. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_{1j}''u_{10}') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_i'u_0'') < f^*(u_{1j}''u_{10}'') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$ dan $f^*(u_{1i}''u_{10}'') < f^*(u_{1j}''u_{10}')$ untuk $i \leq j$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_n'u_0'') < f^*(u_{11}''u_{10}'')$ dan $f^*(u_{11}''u_{10}'') < f^*(u_{11}''u_{10}')$. Maka $f^*(u_n'u_0'') < f^*(u_{11}''u_{10}')$. Artinya $f^*(u_i'u_0'') < f^*(u_{1j}''u_{10}') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i'u_0'') \neq f^*(u_{1j}''u_{10}') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$.

xxii. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j''u_0') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_i'u_0') < f^*(u_j''u_0'') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$ dan $f^*(u_i''u_0'') < f^*(u_j''u_0')$ untuk $i \leq j$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_n'u_0') < f^*(u_1''u_0'')$ dan $f^*(u_1''u_0'') < f^*(u_1''u_0')$. Maka $f^*(u_n'u_0') < f^*(u_1''u_0')$. Artinya $f^*(u_i'u_0') < f^*(u_j''u_0') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_j''u_0') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$.

xxiii. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_{1j}'u_{10}'') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_i'u_0') < f^*(u_j''u_0')$ dan $f^*(u_i''u_0') < f^*(u_{1j}'u_{10}'') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_n'u_0') < f^*(u_1''u_0')$ dan $f^*(u_1''u_0') < f^*(u_{11}'u_{10}'')$. Maka $f^*(u_n'u_0') < f^*(u_{11}'u_{10}'')$. Artinya $f^*(u_i'u_0') < f^*(u_{1j}'u_{10}'') \; \forall i,j \; \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i'u_0') \neq f^*(u_{1j}'u_{10}'') \; \forall \; i,j \; \in \mathbb{Z}$.

xxiv. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_i'u_0') < f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right)$ dan $\forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$ dan $f^*(u_{1i}'u_{10}'') < f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right)$ untuk $i \leq j$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_n'u_0') < f^*(u_{11}'u_{10}'')$ dan $f^*(u_{11}'u_{10}'') < f^*(u_{11}'u_{10}')$. Maka $f^*(u_n'u_0') < f^*(u_{11}'u_{10}')$. Artinya $f^*(u_i'u_0') < f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

xxv. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_i'u_0') < f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right)$ dan $f^*(u_{1i}'u_{10}') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_n'u_0') < f^*(u_{11}'u_{10}')$ dan $f^*(u_{11}'u_{10}') < f^*(u_{11}''u_{10}'')$. Maka $f^*(u_n'u_0') < f^*(u_{11}''u_{10}'')$. Artinya $f^*(u_i'u_0') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

xxvi. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_i'u_0') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dan $f^*(u_{1i}''u_{10}'') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right)$ untuk $i \leq j$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_n'u_0') < f^*(u_{11}''u_{10}'')$ dan $f^*(u_{11}''u_{10}'') < f^*(u_{11}''u_{10}')$. Maka $f^*(u_n'u_0') < f^*(u_{11}''u_{10}')$. Artinya $f^*(u_i'u_0') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i'u_0') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

xxvii. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_i''u_0'') < f^*\left(u_j''u_0'\right)$ untuk $i \leq j$ dan $f^*(u_i''u_0') < f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_n''u_0'') < f^*(u_n''u_0')$ dan $f^*(u_n''u_0') < f^*(u_{11}'u_{10}'')$. Maka $f^*(u_n''u_0'') < f^*(u_{11}'u_{10}'')$. Artinya $f^*(u_i''u_0'') < f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

xxviii. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_i''u_0'') < f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dan $f^*(u_{1i}'u_{10}'') < f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right)$ untuk $i \leq j$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_n''u_0'') < f^*(u_{11}'u_{10}'')$ dan $f^*(u_{11}'u_{10}'') < f^*(u_{11}'u_{10}')$. Maka $f^*(u_n''u_0'') < f^*(u_{11}'u_{10}')$. Artinya $f^*(u_i''u_0'') < f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

xxix. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_i''u_0'') < f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right)$ dan $f^*(u_{1i}'u_{10}') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_n''u_0'') < f^*(u_{11}'u_{10}')$ dan $f^*(u_{11}'u_{10}') < f^*(u_{11}''u_{10}'')$. Maka $f^*(u_n''u_0'') < f^*(u_{11}''u_{10}'')$. Artinya $f^*(u_i''u_0'') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

xxx. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_i''u_0'') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dan $f^*(u_{1i}''u_{10}'') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right)$ untuk $i \leq j$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_n''u_0'') < f^*(u_{11}''u_{10}'')$ dan $f^*(u_{11}''u_{10}'') < f^*(u_{11}''u_{10}')$. Maka $f^*(u_n''u_0'') < f^*(u_{11}''u_{10}')$. Artinya $f^*(u_i''u_0'') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i''u_0'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

xxxi. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_i''u_0') < f^*\left(u_{1j}'u_{10}''\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dan $f^*(u_{1i}'u_{10}'') < f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right)$ untuk $i \leq j$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_n''u_0') < f^*(u_{11}'u_{10}'')$ dan $f^*(u_{11}'u_{10}'') < f^*(u_{11}'u_{10}')$. Maka $f^*(u_n''u_0') < f^*(u_{11}'u_{10}')$. Artinya $f^*(u_i''u_0') < f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

xxxii. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_i''u_0') < f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right)$ dan $f^*(u_{1i}'u_{10}') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_n''u_0') < f^*(u_{11}'u_{10}')$ dan $f^*(u_{11}'u_{10}') < f^*(u_{11}''u_{10}'')$. Maka $f^*(u_n''u_0') < f^*(u_{11}''u_{10}'')$. Artinya $f^*(u_i''u_0') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

xxxiii. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_i''u_0') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dan $f^*(u_{1i}''u_{10}'') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right)$ untuk $i \leq j$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_n''u_0') < f^*(u_{11}''u_{10}'')$ dan $f^*(u_{11}''u_{10}'') < f^*(u_{11}''u_{10}')$. Maka $f^*(u_n''u_0') < f^*(u_{11}''u_{10}')$. Artinya $f^*(u_i''u_0') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_i''u_0') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

xxxiv. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_{1i}'u_{10}'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_{1i}'u_{10}'') < f^*\left(u_{1j}'u_{10}'\right)$ untuk $i \leq j$ dan $f^*(u_{1i}'u_{10}') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_{1n}'u_{10}'') < f^*(u_{1n}'u_{10}')$ dan $f^*(u_{1n}'u_{10}') < f^*(u_{11}''u_{10}'')$. Maka $f^*(u_{1n}'u_{10}'') < f^*(u_{11}''u_{10}'')$. Artinya $f^*(u_{1i}'u_{10}'') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_{1i}'u_{10}'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

xxxv. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u_{1i}'u_{10}'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u_{1i}'u_{10}'') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}''\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dan $f^*(u_{1i}''u_{10}'') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right)$ untuk $i \leq j$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u_{1n}'u_{10}'') < f^*(u_{11}''u_{10}'')$ dan $f^*(u_{11}''u_{10}'') < f^*(u_{11}''u_{10}')$. Maka $f^*(u_{1n}'u_{10}'') < f^*(u_{11}''u_{10}')$. Artinya $f^*(u_{1i}'u_{10}'') < f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u_{1i}'u_{10}'') \neq f^*\left(u_{1j}''u_{10}'\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

xxxvi. Akan ditunjukkan bahwa $f^*(u'_{1i}u'_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Bukti: Sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f^*(u'_{1i}u'_{10}) < f^*\left(u''_{1j}u''_{10}\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dan $f^*(u''_{1i}u''_{10}) < f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$ untuk $i \leq j$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Ini berarti $f^*(u'_{1n}u'_{10}) < f^*(u''_{11}u''_{10})$ dan $f^*(u''_{11}u''_{10}) < f^*(u''_{11}u'_{10})$. Maka $f^*(u'_{1n}u'_{10}) < f^*(u''_{11}u'_{10})$. Artinya $f^*(u'_{1i}u'_{10}) < f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right)$ $\forall i,j\ \in \mathbb{Z}$ dimana $1 \leq i,j \leq n$. Sehingga terbukti bahwa $f^*(u'_{1i}u'_{10}) \neq f^*\left(u''_{1j}u'_{10}\right) \forall\ i,j\ \in \mathbb{Z}$.

Sedangkan untuk pelabelan sisi $f^*(u'_0u'_{10}) = 1$, $f^*(u''_0u'_{10}) = 2$, $f^*(u''_0u''_{10}) = 3$, $f^*(u'_0u''_{10}) = 5$, jelas bahwa semuanya memperoleh label yang berbeda. Dari pembuktian sebelumnya dapat disimpulkan bahwa pelabelan sisi $f^*(u'_1u''_0) < f^*(u'_1u'_0) < f^*(u''_1u''_0) < f^*(u''_1u'_0) < f^*(u'_{11}u''_{10}) < f^*(u'_{11}u'_{10}) < f^*(u''_{11}u''_{10}) < f^*(u''_{11}u'_{10})$. Sehingga, selanjutnya cukup dibuktikan bahwa $f^*(u'_0u''_{10}) < f^*(u'_1u''_0)$.

Bukti : Diketahui bahwa $f^*(u'_0u''_{10}) = 5$ dan $f^*(u'_1u''_0) = \frac{(1)^2+6(1)+5}{2} = 6$, sehingga jelas bahwa $5 < 6$. Artinya $f^*(u'_0u''_{10}) < f^*(u'_1u''_0)$.

Dengan demikian terbukti bahwa pada pelabelan sisi f^* di graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$, tidak ada dua sisi berbeda yang memperoleh label yang sama. Ini berarti f adalah pelabelan *analytic mean* pada graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$ dan graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$ adalah suatu graf *analytic mean*.

Untuk lebih memahami tentang pelabelan *analytic mean* pada graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$, perhatikanlah contoh di bawah ini.

Contoh 3.4 : Pilih graf bistar $B_{4,4}$ lalu operasikan dengan operasi graf bayangan. Maka diperoleh himpunan titik di graf bayangan dari graf bistar $B_{4,4}$ adalah $\{u'_0, u'_i, u''_0, u''_i, u'_{10}, u'_{1i}, u''_{10}, u''_{1i} : 1 \leq i \leq 4\}$ dan himpunan sisinya adalah $\{u'_0u''_i, u'_0u'_i, u''_0u''_i, u''_0u'_i, u'_{10}u''_{1i}, u'_{10}u'_{1i}, u''_{10}u''_{1i}, u''_{10}u'_{1i} :\ 1 \leq i \leq 4$. Dengan banyaknya titik p adalah $4n + 4 = 4(4) + 4 = 20$.

Maka pelabelan *analytic mean* $f: V\left(D_2(B_{4,4})\right) \to \{0,1,2, \dots 19\}$ pada graf bayangan dari graf bistar $B_{4,4}$ adalah sebagai berikut:

1. Pelabelan pada titik u_i' :

$$f(u_i') = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ i + 3, & 1 \le i \le n \end{cases}$$

$f(u_0') = 0$

$f(u_1') = 1 + 3 = 4$

$f(u_2') = 2 + 3 = 5$

$f(u_3') = 3 + 3 = 6$

$f(u_4') = 4 + 3 = 7$

2. Pelabelan pada titik u_i'' :

$$f(u_i'') = \begin{cases} 2, & i = 0 \\ n + i + 3, & 1 \le i \le n \end{cases}$$

$f(u_0'') = 2$

$f(u_1'') = 4 + 1 + 3 = 8$

$f(u_2'') = 4 + 2 + 3 = 9$

$f(u_3'') = 4 + 3 + 3 = 10$

$f(u_4'') = 4 + 4 + 3 = 11$

3. Pelabelan pada titik u_{1i}' :

$$f(u_{1i}') = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 2n + i + 3, & 1 \le i \le n \end{cases}$$

$f(u_{10}') = 1$

$f(u_{11}') = 2(4) + 3 + 1 = 12$

$f(u_{12}') = 2(4) + 3 + 2 = 13$

$f(u_{13}') = 2(4) + 3 + 3 = 14$

$f(u_{14}') = 2(4) + 3 + 4 = 15$

4. Pelabelan pada titik u_{1i}'' :

$$f(u_{1i}'') = \begin{cases} 3, & i = 0 \\ 3n + i + 3, & 1 \le i \le n \end{cases}$$

$f(u_{10}'') = 3$

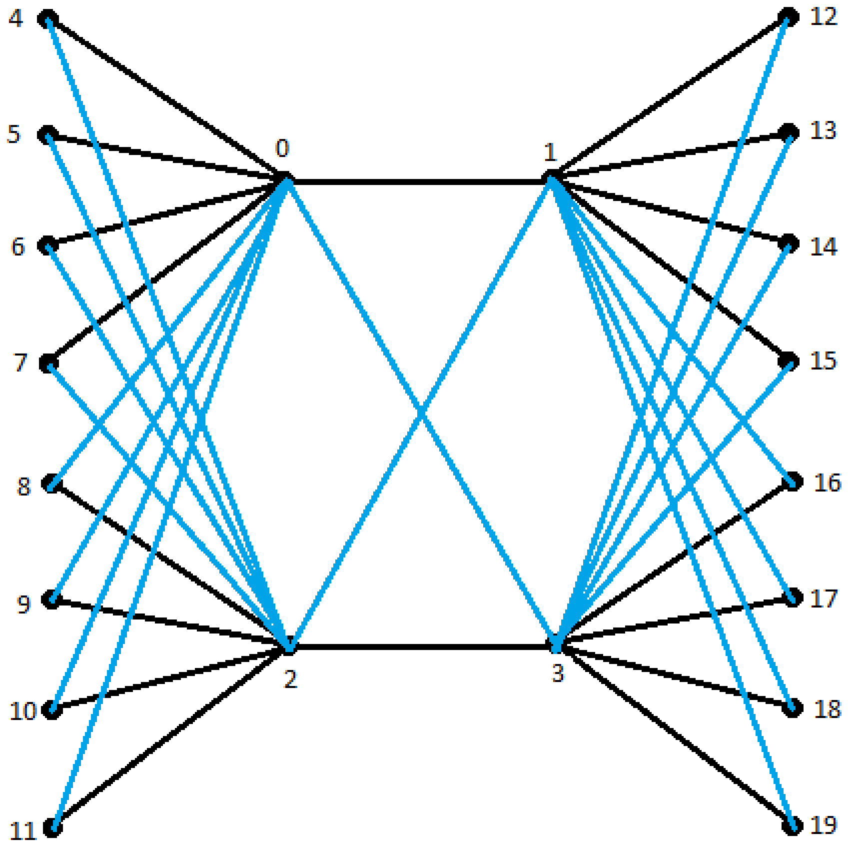
$f(u_{11}'') = 3(4) + 3 + 1 = 16$

$f(u_{12}'') = 3(4) + 3 + 2 = 17$

$f(u_{13}'') = 3(4) + 3 + 3 = 18$

$f(u_{14}'') = 3(4) + 3 + 4 = 19$

Sebagai ilustrasi, Gambar 3.11 menunjukkan pelabelan titik pada graf bayangan dari graf bistar $B_{4,4}$.



Gambar 3.11 Pelabelan titik pada graf bayangan dari graf bistar $B_{4,4}$.

Sebagai akibat, akan diperoleh pelabelan sisi f^* yang bergantung pada f pada graf bayangan dari graf bistar $B_{4,4}$ dimana $n = 4$, sebagai berikut.

1. Pelabelan pada sisi $u_i'u_0''$:

$$f^*(u_i'u_0'') = \begin{cases} \dfrac{i^2 + 6i + 6}{2} & \text{saat } i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{i^2 + 6i + 5}{2} & \text{saat } i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n \end{cases}$$

$$f^*(u_1'u_0'') = \frac{(1)^2 + 6(1) + 5}{2} = 6$$

$$f^*(u_2'u_0'') = \frac{(2)^2 + 6(2) + 6}{2} = 11$$

$$f^*(u_3'u_0'') = \frac{(3)^2 + 6(3) + 5}{2} = 16$$

$$f^*(u_4'u_0'') = \frac{(4)^2 + 6(4) + 6}{2} = 23$$

2. Pelabelan pada sisi $u_i'u_0'$:

$$f^*(u_i'u_0') = \begin{cases} \dfrac{i^2 + 6i + 10}{2} \text{saat } i \text{ genap} ; 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{i^2 + 6i + 9}{2} \text{saat } i \text{ ganjil} ; 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f^*(u_1'u_0') = \frac{(1)^2 + 6(1) + 9}{2} = 8$$

$$f^*(u_2'u_0') = \frac{(2)^2 + 6(2) + 10}{2} = 13$$

$$f^*(u_3'u_0') = \frac{(3)^2 + 6(3) + 9}{2} = 18$$

$$f^*(u_4'u_0') = \frac{(4)^2 + 6(4) + 10}{2} = 25$$

3. Pelabelan pada sisi $u_i''u_0''$:

$$f^*(u_i''u_0'') = \begin{cases} \dfrac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 6}{2}, n + i \text{ genap} ; 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 5}{2}, n + i \text{ ganjil} ; 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f^*(u_1''u_0'') = \frac{(4)^2 + (1)^2 + 6(4) + 6(1) + 2(4)(1) + 5}{2} = 30$$

$$f^*(u_2''u_0'') = \frac{(4)^2 + (2)^2 + 6(4) + 6(2) + 2(4)(2) + 6}{2} = 39$$

$$f^*(u_3''u_0'') = \frac{(4)^2 + (3)^2 + 6(4) + 6(3) + 2(4)(3) + 5}{2} = 48$$

$$f^*(u_4''u_0'') = \frac{(4)^2 + (4)^2 + 6(4) + 6(4) + 2(4)(4) + 6}{2} = 59$$

4. Pelabelan pada sisi $u_i''u_0'$:

$$f^*(u_i''u_0') = \begin{cases} \dfrac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 10}{2}, n + i \text{ genap} ; 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{n^2 + i^2 + 6n + 6i + 2ni + 9}{2} \quad , n + i \text{ ganjil} ; 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f^*(u_1''u_0') = \frac{(4)^2 + (1)^2 + 6(4) + 6(1) + 2(4)(1) + 9}{2} = 32$$

$$f^*(u_2''u_0') = \frac{(4)^2 + (2)^2 + 6(4) + 6(2) + 2(4)(2) + 10}{2} = 41$$

$$f^*(u_3''u_0') = \frac{(4)^2 + (3)^2 + 6(4) + 6(3) + 2(4)(3) + 9}{2} = 50$$

$$f^*(u_4''u_0') = \frac{(4)^2 + (4)^2 + 6(4) + 6(4) + 2(4)(4) + 10}{2} = 61$$

5. Pelabelan pada sisi $u_{1i}'u_{10}''$:

$$f^*(u_{1i}'u_{10}'') = \begin{cases} \dfrac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni}{2} & , i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 1}{2} & , i \text{ ganjil} ;\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

$$f^*(u_{11}'u_{10}'') = \frac{4(4)^2 + (1)^2 + 12(4) + 6(1) + 4(4)(1) + 1}{2} = 68$$

$$f^*(u_{12}'u_{10}'') = \frac{4(4)^2 + (2)^2 + 12(4) + 6(2) + 4(4)(2)}{2} = 80$$

$$f^*(u_{13}'u_{10}'') = \frac{4(4)^2 + (3)^2 + 12(4) + 6(3) + 4(4)(3) + 1}{2} = 94$$

$$f^*(u_{14}'u_{10}'') = \frac{4(4)^2 + (4)^2 + 12(4) + 6(4) + 4(4)(4)}{2} = 108$$

6. Pelabelan pada sisi $u_{1i}'u_{10}'$:

$$f^*(u_{1i}'u_{10}') = \begin{cases} \dfrac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 8}{2} & , i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{4n^2 + i^2 + 12n + 6i + 4ni + 9}{2} & , i \text{ ganjil} ;\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

$$f^*(u_{11}'u_{10}') = \frac{4(4)^2 + (1)^2 + 12(4) + 6(1) + 4(4)(1) + 9}{2} = 72$$

$$f^*(u_{12}'u_{10}') = \frac{4(4)^2 + (2)^2 + 12(4) + 6(2) + 4(4)(2) + 8}{2} = 84$$

$$f^*(u_{13}'u_{10}') = \frac{4(4)^2 + (3)^2 + 12(4) + 6(3) + 4(4)(3) + 9}{2} = 98$$

$$f^*(u_{14}'u_{10}') = \frac{4(4)^2 + (4)^2 + 12(4) + 6(4) + 4(4)(4) + 8}{2} = 112$$

7. Pelabelan pada sisi $u_{1i}''u_{10}''$:

$$f^*(u_{1i}''u_{10}'') = \begin{cases} \dfrac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni}{2} & , n + i \text{ genap} ; 1 \le i \le n \\ \dfrac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 1}{2} & , n + i \text{ ganjil} ;\ 1 \le i \le n \end{cases}$$

$$f^*(u_{11}''u_{10}'') = \frac{9(4)^2 + (1)^2 + 18(4) + 6(1) + 6(4)(1) + 1}{2} = 124$$

$$f^*(u''_{12}u''_{10}) = \frac{9(4)^2 + (2)^2 + 18(4) + 6(2) + 6(4)(2)}{2} = 140$$

$$f^*(u''_{13}u''_{10}) = \frac{9(4)^2 + (3)^2 + 18(4) + 6(3) + 6(4)(3) + 1}{2} = 158$$

$$f^*(u''_{14}u''_{10}) = \frac{9(4)^2 + (4)^2 + 18(4) + 6(4) + 6(4)(4)}{2} = 176$$

8. Pelabelan pada sisi $u''_{1i}u'_{10}$:

$$f^*(u''_{1i}u'_{10}) = \begin{cases} \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 8}{2}, n + i \text{ genap} ; 1 \leq i \leq n \\ \frac{9n^2 + i^2 + 18n + 6i + 6ni + 9}{2}, n + i \text{ ganjil} ;\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f^*(u''_{11}u'_{10}) = \frac{9(4)^2 + (1)^2 + 18(4) + 6(1) + 6(4)(1) + 9}{2} = 128$$

$$f^*(u''_{12}u'_{10}) = \frac{9(4)^2 + (2)^2 + 18(4) + 6(2) + 6(4)(2) + 8}{2} = 144$$

$$f^*(u''_{13}u'_{10}) = \frac{9(4)^2 + (3)^2 + 18(4) + 6(3) + 6(4)(3) + 9}{2} = 162$$

$$f^*(u''_{14}u'_{10}) = \frac{9(4)^2 + (4)^2 + 18(4) + 6(4) + 6(4)(4) + 8}{2} = 180$$

9. Pelabelan pada sisi u_0u_{10}:

   $f^*(u'_0u'_{10}) = 1$

10. Pelabelan pada sisi u'_0u_{10}:

    $f^*(u''_0u'_{10}) = 2$

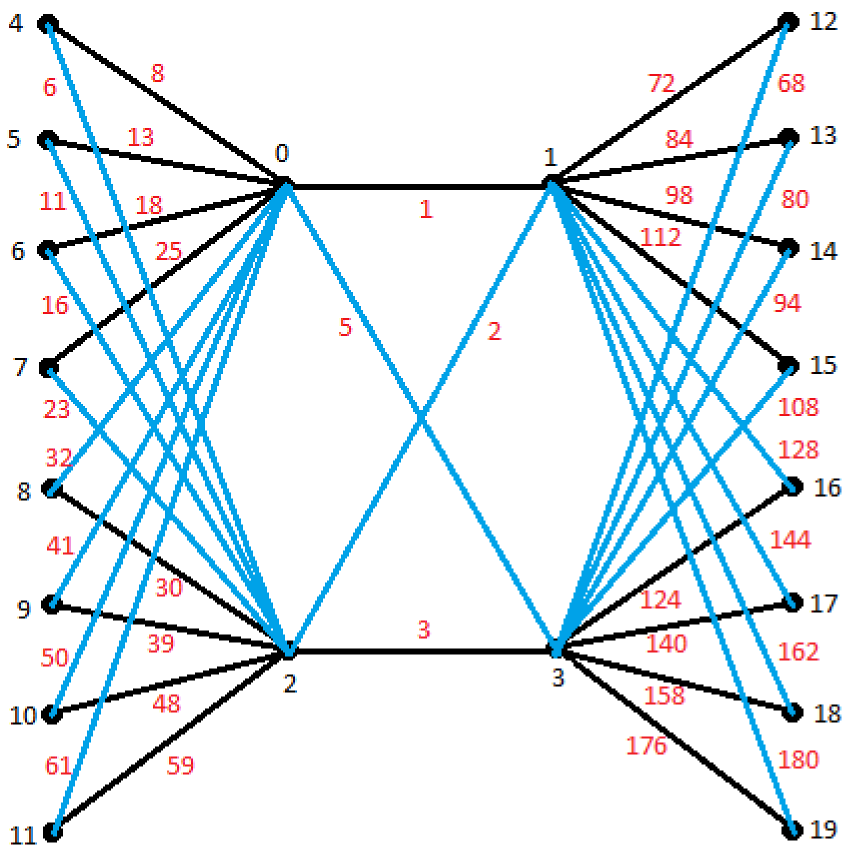
11. Pelabelan pada sisi $u'_0u'_{10}$:

    $f^*(u''_0u''_{10}) = 3$

12. Pelabelan pada sisi $u_0u'_{10}$:

    $f^*(u'_0u''_{10}) = 5$

Sebagai ilustrasi, Gambar 3.12 menunjukkan pelabelan *analytic mean* dan pelabelan sisi pada graf bayangan dari graf bistar $B_{4,4}$.



Gambar 3.12 Pelabelan *analytic mean* pada graf bayangan dari graf bistar $B_{4,4}$.

Berdasarkan pelabelan tersebut, setiap sisi yang ada di graf bayangan dari graf bistar $B_{4,4}$ memperoleh label sisi yang berbeda, sehingga graf bayangan dari graf bistar $B_{4,4}$ memenuhi pelabelan *analytic mean* $f: V\big(D_2(K_{1,4})\big) \rightarrow \{0,1,2, \dots 19\}$. Dengan demikian graf bayangan dari graf bistar $B_{4,4}$ adalah suatu graf *analytic mean*.