BAB II

LANDASAN TEORI

Untuk menjelaskan pelabelan *analytic mean* pada graf bayangan dari graf bintang $K_{1,n}$ dan graf bayangan dari graf bistar $B_{n,n}$ perlu adanya beberapa teori dasar yang akan menunjang pembuktian dan mempermudah pemahaman. Beberapa teori dasar tersebut meliputi himpunan, fungsi, graf, pelabelan graf, pelabelan mean, dan pelabelan *analytic mean*.

2.1 Himpunan

Definisi 2.1.1 Himpunan [10] : Sebuah himpunan adalah suatu kumpulan objek-objek berbeda yang didefinisikan dengan jelas.

Objek yang terdapat dalam himpunan disebut elemen, unsur atau anggota.

Contoh 2.1 : Misalkan V adalah himpunan dari huruf vokal. Maka dapat ditulis dengan $V = \{a, i, u, e, o\}$.

Definisi 2.1.2 Himpunan bagian [9] : Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen di A juga merupakan elemen di B. Jika himpunan A adalah himpunan bagian dari himpunan B, maka dinotasikan dengan $A \subseteq B$.

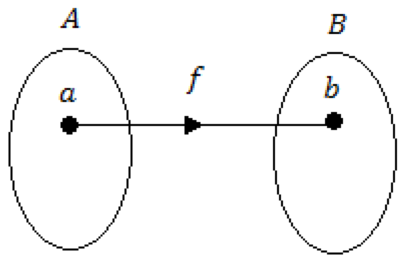
Definisi 2.1.3 [7] : Himpunan A dikatakan sama dengan himpunan B jika dan hanya jika keduanya mempunyai elemen yang sama. Dengan kata lain, A sama dengan B jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian maka dikatakan A tidak sama dengan B. Jika himpunan A sama dengan himpunan B, maka dinotasikan dengan,

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A$$

Contoh 2.2 : Misalkan terdapat dua himpunan yaitu, $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{3,1,2\}$. Karena $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ maka $A = B$.

2.2 Fungsi

Definisi 2.2.1 Fungsi [5] : Misalkan himpunan A dan B adalah dua himpunan tak kosong. Suatu fungsi atau pemetaan f dari A ke B adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap elemen a dari himpunan A pada tepat satu elemen b dari himpunan B. Himpunan A disebut daerah asal dari f dan himpunan B disebut daerah hasil dari f. Jika f menghubungkan a ke b, maka b disebut dengan bayangan dari a terhadap f. Fungsi f dari A ke B dinotasikan dengan $f: A \longrightarrow B$. Gambar 2.1 mempresentasikan fungsi dari A ke B.



Gambar 2.1 Fungsi f memetakan A ke B.

Definisi 2.2.2 Satu-satu [9]: Suatu fungsi f dikatakan satu-satu atau injektif jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan yang sama. Dengan kata lain, jika a dan b adalah elemen himpunan A maka,

$$f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$$

Definisi di atas menunjukkan bahwa satu elemen dari himpunan B hanya dapat menjadi bayangan dari satu elemen dari himpunan A. Sehingga dengan cara lain, f satu-satu atau injektif jika $a \neq b$ maka $f(a) \neq f(b)$.

Contoh 2.3 : Misalkan $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x + 1$ merupakan fungsi satu-satu?

<u>Penyelesaian:</u> Misalkan $f(a) = f(b)$, dimana $a, b \in \mathbb{Z}$,

Maka $a + 1 = b + 1 \Longleftrightarrow a + 1 - 1 = b + 1 - 1 \Longleftrightarrow a = b$.

$\therefore$ Karena f memenuhi $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$, maka f adalah fungsi satu-satu.

Definisi 2.2.4 Pada [9] : Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan pada atau surjektif, jika dan hanya jika untuk setiap elemen $b \in B$ terdapat suatu elemen $a \in A$ sehingga $f(a) = b$.

Contoh 2.4 : Misalkan $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x + 1$ merupakan fungsi pada?

<u>Penyelesaian:</u> Misalkan $f(x) = y$, dimana $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x + 1 = y$$

$$\Leftrightarrow x = y - 1$$

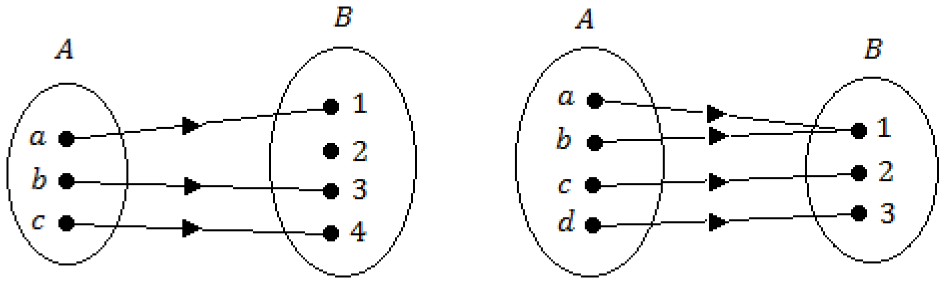
$\therefore$ Karena untuk setiap $y \in \mathbb{Z}$ terdapat $x = y - 1 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $f(x) = y$, maka fungsi f adalah pada.

Definisi 2.2.5 Bijektif [7] : Suatu fungsi f dikatakan bijektif jika f satu-satu dan pada.

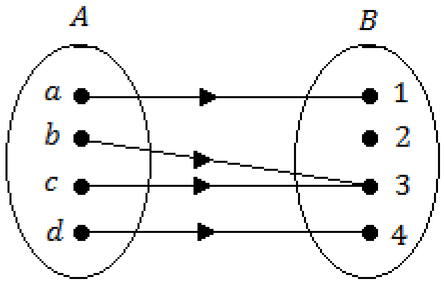
Contoh 2.5 : Misalkan $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x + 1$ merupakan fungsi bijektif?

<u>Penyelesaian:</u> Karena sebelumnya telah dibuktikan bahwa $f(x) = x + 1$ adalah fungsi satu-satu dan pada, maka berdasarkan definisi jelas bahwa $f(x) = x + 1$ merupakan fungsi bijektif.

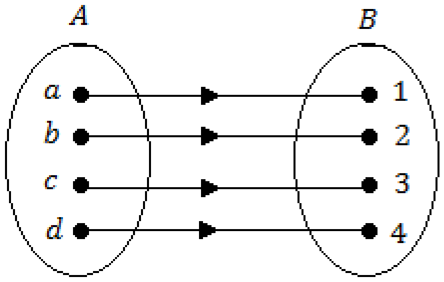
Untuk lebih memahami materi mengenai fungsi, perhatikanlah Gambar 2.2 yang akan menunjukkan perbedaan antara fungsi satu-satu tapi bukan fungsi pada, fungsi pada tapi bukan fungsi satu-satu, fungsi satu-satu dan pada, bukan fungsi satu-satu maupun pada dan bukan fungsi.



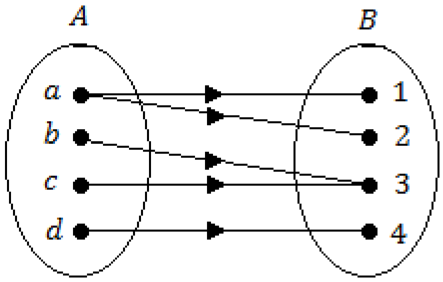
(a) (b)



(c)



(d)



(e)

Gambar 2.2 (a) Fungsi satu-satu tapi bukan fungsi pada.

(b) Fungsi pada tapi bukan fungsi satu-satu.

(c) Bukan fungsi pada dan bukan fungsi satu-satu.

(d) Fungsi satu-satu dan pada.

(e) Bukan fungsi.

2.3 Graf

Definisi 2.3.1 Graf [7] : Graf G adalah pasangan himpunan $\left(V(G), E(G)\right)$ yang dapat dinotasikan dengan $G = \left(V(G), E(G)\right)$. Dimana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari titik-titik dan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik. Kardinalitas pada himpunan titik $V(G)$ dapat dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan kardinalitas pada himpunan sisi $E(G)$ dapat dinotasikan dengan $|E(G)|$.

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori bergantung pada sudut pandang pengelompokkannya. Berdasarkan ada tidaknya sisi, graf dapat dikelompokkan sebagai berikut.

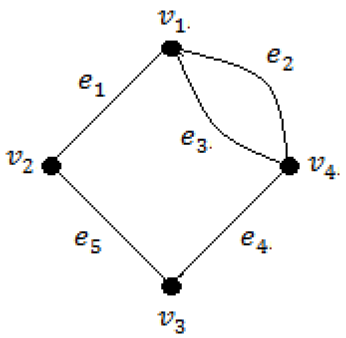
Definisi 2.3.2 Graf trivial [7] : Graf G dikatakan graf trivial jika G hanya mempunyai satu buah titik tanpa ada sebuah sisi pun.

Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut ini :

Gambar 2.3 Graf trivial.

Definisi 2.3.3 Sisi ganda [7] : Sisi ganda adalah dua buah sisi atau lebih pada suatu graf G yang menghubungkan sepasang titik.

Contoh 2.6 : Di bawah ini merupakan graf dengan himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

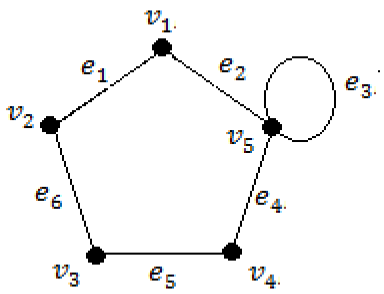


Gambar 2.4 Graf ganda.

Pada graf di atas, sisi e_2 dan sisi e_3 dinamakan sisi ganda karena kedua sisi ini menghubungkan sepasang titik yang sama, yaitu titik v_1 dan v_4.

Definisi 2.3.4 Gelang [7] : Gelang adalah suatu sisi yang berawal dan berakhir di titik yang sama.

Contoh 2.7 : Di bawah ini adalah graf yang mempunyai himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

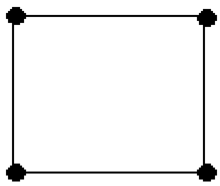


Gambar 2.5 Graf semu.

Pada graf di atas, sisi e_3 dinamakan gelang karena berawal dan berakhir di titik yang sama.

Definisi 2.3.5 Graf sederhana [7] : Graf G dikatakan graf sedehana jika G tidak mengadung gelang atau sisi ganda.

Contoh 2.8 : Graf di bawah ini merupakan salah satu contoh dari graf sederhana karena graf tersebut tidak memiliki sisi ganda maupun gelang.



Gambar 2.6 Graf sederhana.

Definisi 2.3.6 Graf tak-sederhana [7] : Graf G dikatakan graf tak sederhana jika G mengandung sisi ganda atau gelang. Ada dua macam graf tak-sederhana yaitu graf ganda dan graf semu.

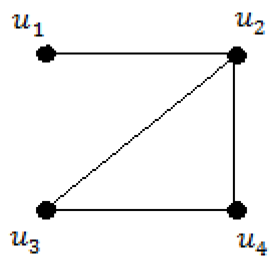
Definisi 2.3.7 Graf ganda [7] : Graf G dikatakan graf ganda jika G mengandung sisi ganda.

Definisi 2.3.8 Graf semu [7] : Graf G dikatakan graf semu jika G mengandung gelang.

Adapun berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan menjadi dua jenis.

Definisi 2.3.9 Graf tak-berarah [7] : Graf G dikatakan graf tak-berarah jika setiap sisi di G tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak-berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan.

Contoh 2.9: Graf di bawah ini mempunyai himpunan titik $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan himpunan sisi $\{u_1u_2, u_2u_3, u_2u_4, u_3u_4\}$.

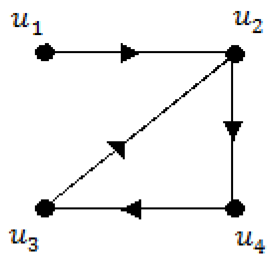


Gambar 2.7 Graf tak-berarah.

Graf di atas tidak memiliki orientasi arah, sehingga dapat dikatakan sebagai graf tak-berarah. Karena pada graf tak-berarah urutan pasangan titik yang dihubungkan tidak diperhatikan, maka sisi u_1u_2 akan sama dengan sisi u_2u_1, sisi u_2u_4 sama dengan sisi u_4u_2, sisi u_3u_4 sama dengan sisi u_4u_3, dan sisi u_3u_2 sama dengan sisi u_2u_3.

Definisi 2.3.10 Graf berarah [7] : Graf G dikatakan graf berarah jika setiap sisi yang ada di G diberikan orientasi arah. Sisi yang memiliki arah lebih sering disebut dengan busur.

Contoh 2.10 : Graf di bawah ini mempunyai himpunan titik $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan himpunan sisi $\{u_1u_2, u_2u_3, u_2u_4, u_3u_4\}$.



Gambar 2.8 Graf berarah.

Graf di atas memiliki orietasi arah, sehingga dapat disebut sebagai graf berarah. Karena pada graf berarah urutan pasangan titik yang dihubungkan diperhatikan, maka sisi $u_1u_2 \neq u_2u_1$, $u_2u_4 \neq u_4u_2$, $u_4u_3 \neq u_3u_4$, dan $u_3u_2 \neq u_2u_3$.

Adapun graf yang akan digunakan dalam tugas akhir ini adalah graf sederhana dan tak-berarah, yaitu graf yang tidak memiliki sisi ganda dan gelang serta tidak memiliki orientasi arah.

Untuk lebih memahami materi, ada beberapa istilah dalam graf yang harus diketahui. Adapun istilah dalam graf yang akan digunakan adalah sebagai berikut.

Definisi 2.3.11 Ketetanggaan [7] : Dua buah titik dalam graf tak-berarah G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika uv adalah sebuah sisi pada graf G.

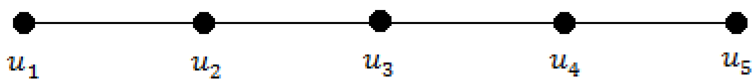
Definisi 2.3.12 Bersisian [7] : Untuk sembarang sisi $e = uv$, sisi e dikatakan bersisian dengan titik u dan titik v.

Definisi 2.3.13 Derajat [7] : Derajat suatu titik pada graf tak berarah adalah banyaknya sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Notasi $d(v)$ menyatakan derajat suatu titik v.

Graf yang akan digunakan dalam tugas akhir ini adalah beberapa jenis dari graf khusus yaitu, graf bintang $K_{1,n}$ dan graf bistar $B_{n,n}$. Untuk lebih memahami graf-graf tersebut, terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai graf lintasan P_n, graf bipartit dan graf bipartit lengkap.

Definisi 2.3.14 Graf lintasan [4] : Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n, adalah suatu graf terhubung yang memiliki 2 titik berderajat 1 dan $(n-2)$ titik berderajat 2.

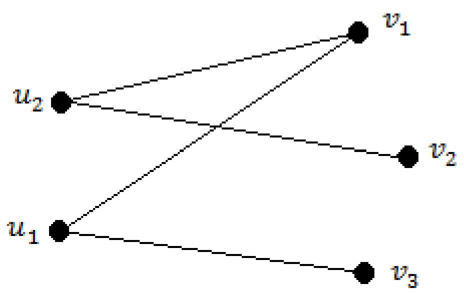
Contoh 2.11 : Di bawah ini merupakan contoh dari graf lintasan dengan lima titik yaitu titik u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 dan empat sisi yaitu, $u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5$, yang dapat disebut dengan graf lintasan P_5.



Gambar 2.9 Graf lintasan P_5.

Definisi 2.3.15 Graf bipartit [6] : Graf G dikatakan bipartit jika titik-titiknya dapat dibagi menjadi dua partisi, sedemikian sehingga setiap sisi memiliki titik ujung di partisi yang berbeda. Dengan kata lain, setiap titik di masing-masing partisi tidak bertetangga.

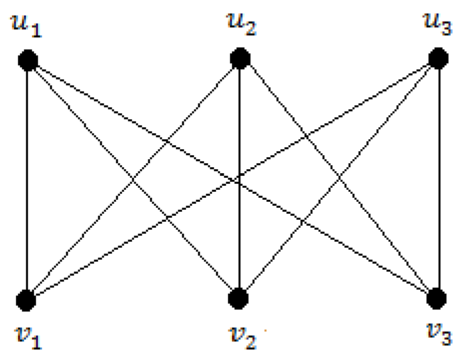
Contoh 2.12 : Misalkan terdapat sebuah graf G yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua yaitu $V_1 = \{u_1, u_2\}$ dan $V_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$, dan sisi-sisi yang ada dalam graf tersebut adalah u_1v_1, u_1v_2, u_2v_1 dan u_2v_3, maka graf G dapat disebut dengan graf bipartit. Untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 2.10 di bawah ini.



Gambar 2.10 Graf bipartit.

Definisi 2.3.16 Graf bipartit lengkap [6] : Graf bipartit G dikatakan graf bipartit lengkap jika setiap titik di V_1 bertetangga dengan semua titik di V_2. Jika V_1 mengandung m titik dan V_2 mengandung n titik, maka graf bipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{m,n}$.

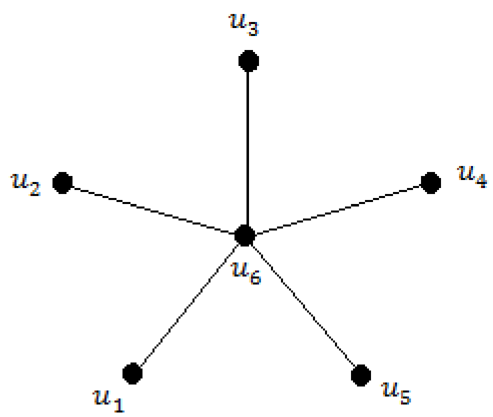
Contoh 2.13 : Di bawah ini diberikan graf bipartit lengkap $K_{3,3}$ dimana himpunan titiknya dapat dibagi menjadi dua himpunan bagian, yaitu $V_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan $V_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan setiap titik di V_1 bertetangga dengan semua titik di V_2, sehingga sisi-sisi yang ada di graf ini adalah $u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3$, u_3v_1, u_3v_2, u_3v_3.



Gambar 2.11 Graf bipartiti lengkap $K_{3,3}$.

Definisi 2.3.17 Graf bintang [12] : Graf bintang adalah graf bipartit lengkap $K_{1,n}$.

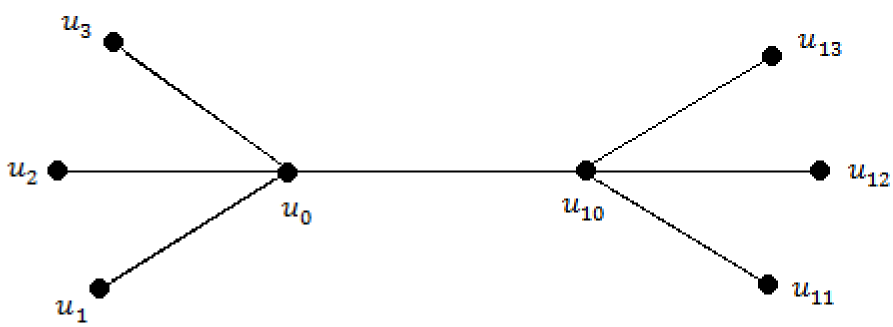
Contoh 2.14 : Di bawah ini adalah graf bintang $K_{1,5}$ dengan enam titik, yaitu $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ dan lima sisi, yaitu $u_1u_6, u_2u_6, u_3u_6, u_4u_6$, dan u_5u_6



Gambar 2.12 Graf bintang $K_{1,5}$.

Definisi 2.3.18 Graf bistar [12] : Graf bistar adalah suatu graf yang diperoleh dari dua buah salinan graf bintang $K_{1,n}$ dengan menghubungkan titik-titik dengan derajat tertinggi dengan sebuah sisi. Misalkan $K'_{1,n}$ adalah salinan dari $K_{1,n}$, maka untuk $u_i \in K_{1,n}$ dimana $0 \leq i \leq n$, dinotasikan $u_{1i} \in K'_{1,n}$ yang berpadanan dengan u_i. Graf bistar dinotasikan dengan $B_{n,n}$.

Contoh 2.15 : Misalkan terdapat sebuah graf bintang $K_{1,3}$ dengan himpunan sisi $\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ dimana titik u_0 berderajat tiga dan sisi lainnya berderajat satu. Maka untuk membentuk suatu graf bistar $B_{3,3}$, langkah pertama buatlah salinan dari $K_{1,3}$, misalkan $K'_{1,3}$. Dimana untuk setiap $u_0, u_1, u_2, u_3 \in K_{1,3}$ dinotasikan $u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13} \in K'_{1,3}$ yang secara berturut-turut berpadanan dengan u_0, u_1, u_2, u_3. Selanjutnya hubungkanlah titik-titik dengan derajat tertinggi yaitu u_0 di $K_{1,3}$ dan u_{10} di $K'_{1,3}$ dengan sebuah sisi. Sehingga diperoleh graf bistar $B_{3,3}$ seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 2.13 di bawah ini.



Gambar 2.13 Graf bistar $B_{3,3}$.

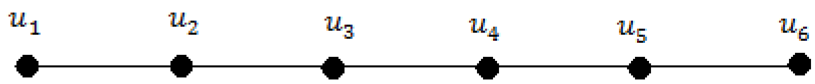
Dalam tugas akhir ini akan digunakan pula sebuah operasi graf yang disebut dengan graf bayangan yang akan dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.3.19 Graf bayangan [14] : Graf bayangan dari graf G adalah graf terhubung yang diperoleh dari dua salinan dari graf G, misalkan G' dan G'' dengan menghubungkan setiap titik u' di G' pada tetangga dari titik u''di G'' yang bersesuaian dengan u'. Graf bayangan dari graf G dinotasikan dengan $D_2(G)$.

Definisi 2.3.20 Graf *m*-bayangan [1] : Graf m-bayangan dari graf terhubung G diperoleh dengan mengambil m buah salianan dari graf G, misalkan $G_1, G_2, G_3, \dots, G_m$, kemudian hubungkan setiap titik u di G_i pada tetangga dari titik v yang bersesuaian dengan u di G_j untuk $1 \leq i, j \leq m$. Graf m-bayangan dari graf G dinotasikan dengan $D_m(G)$.

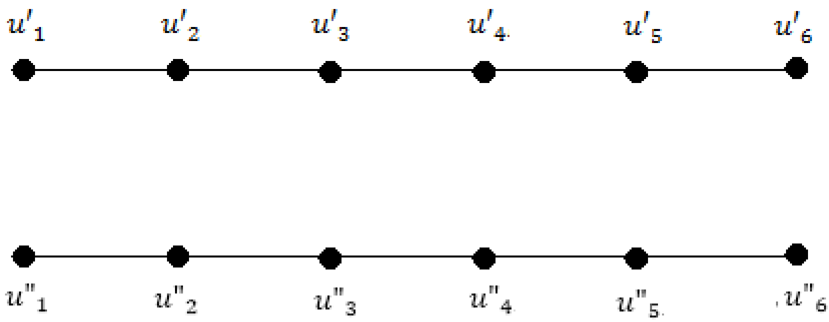
Berdasarkan definisi di atas, maka graf 2-bayangan dikenal juga dengan graf bayangan $D_2(G)$.

Contoh 2.16 : Misalkan graf lintasan P_6 yang memiliki enam titik yaitu $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ adalah graf yang akan dioperasikan dengan operasi graf bayangan. Graf lintasan P_6 ditunjukkan dalam Gambar 2.14 berikut ini.



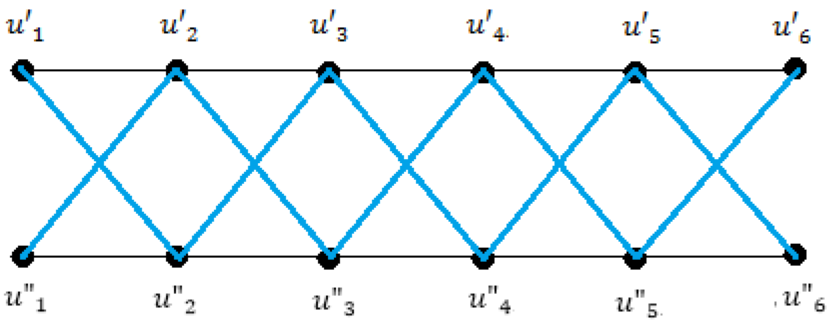
Gambar 2.14 Graf lintasan P_6.

Untuk membuat graf bayangan dari graf lintasan P_6, maka langkah pertama buatlah dua buah salinan dari graf lintasan P_6 misalkan P'_6 dan P''_6 dimana untuk $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \in P_6$ dinotasikan $u'_1, u'_2, u'_3, u'_4, u'_5, u'_6 \in P'_6$ dan $u"_1, u"_2, u"_3, u"_4, u"_5, u"_6 \in P"_6$ yang berturut-turut berpadanan dengan $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$. Perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 2.15 Graf lintasan $P'_6 \cup P"_6$.

Selanjutnya, hubungkanlah setiap titik u'_i di P'_6 pada tetangga dari titik $u"_i$ di $P"_6$ yang berpadanan dengan u'_i, yaitu u'_1 pada $u"_2$, u'_2 pada $u"_1$ dan $u"_3$, u'_3 pada $u"_2$ dan $u"_4$, u'_4 pada titik $u"_3$ dan $u"_5$, titik u'_5 pada titik $u"_4$ dan $u"_6$, dan titik u'_6 pada titik $u"_5$ yang akan membentuk suatu graf bayangan dari graf lintasan P_6 seperti yang ditunjukkan dalam gambar di bawah ini.

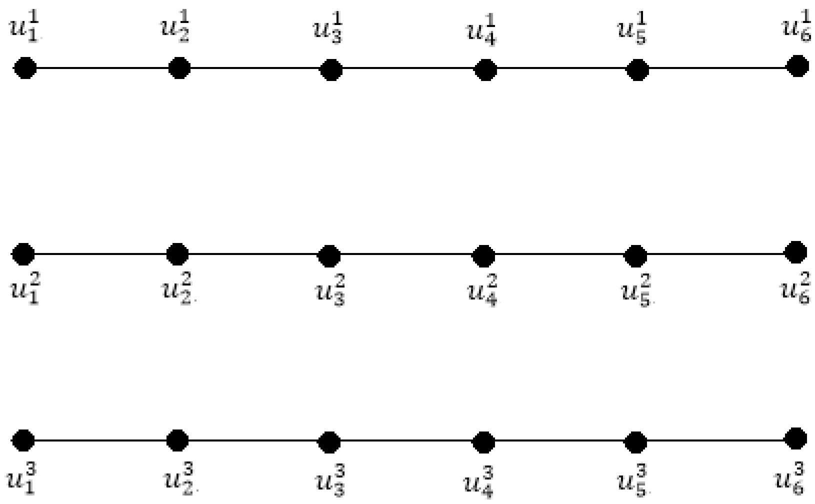


Gambar 2.16 Graf bayangan dari graf lintasan P_6.

Contoh 2.17 : Misalkan graf lintasan P_6 yang memiliki enam titik yaitu $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ adalah graf yang akan dioperasikan dengan operasi graf 3-bayangan. Graf lintasan P_6 ditunjukkan dalam gambar di bawah ini.

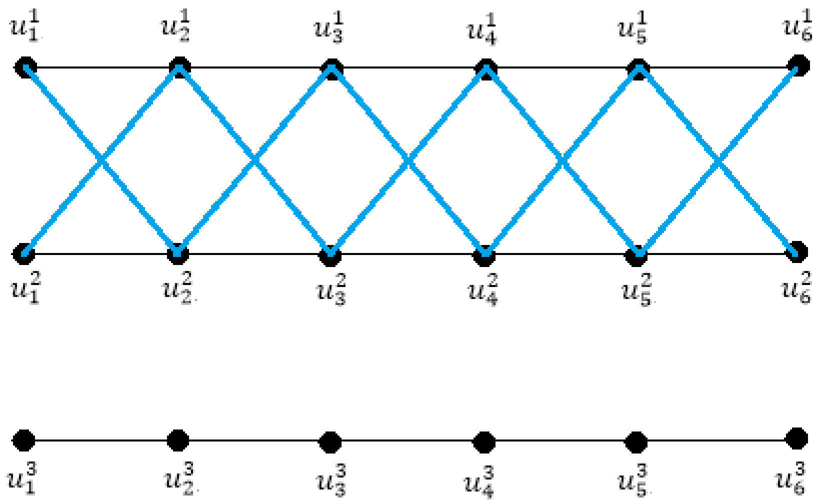
Gambar 2.17 Graf lintasan P_6.

Untuk membuat graf 3-bayangan dari graf lintasan P_6, maka langkah pertama buatlah tiga buah salinan dari P_6 misalkan P_6^1, P_6^2 dan P_6^3 yang masing masing juga memliki enam titik, sehingga terbentuklah graf seperti yang ditunjukkan dalam gambar di bawah ini.



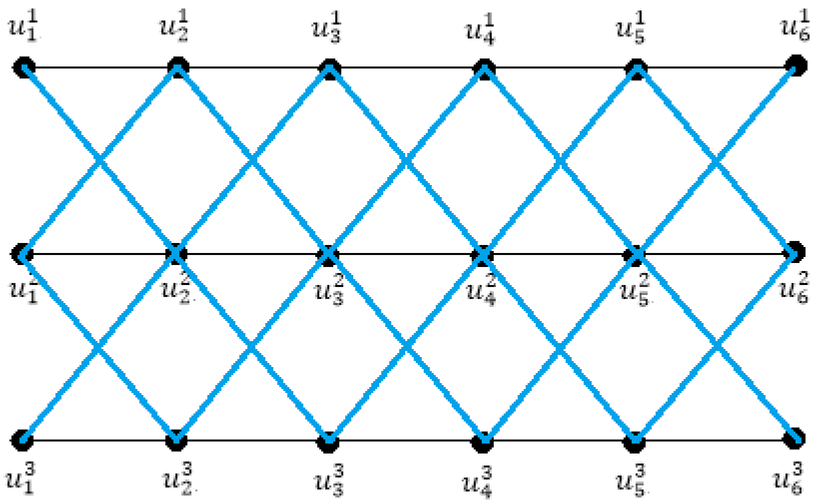
Gambar 2.18 Graf $P_6^1 \cup P_6^2 \cup P_6^3$.

Langkah kedua, hubungkanlah setiap titik u_i^1 di P_6^1 pada tetangga dari titik u_i^2 di P_6^2 yang berpadanan dengan u_i^1, yaitu u_1^1 pada u_2^2, u_2^1 pada u_1^2 dan u_3^2, u_3^1 pada u_2^2 dan u_4^2, u_4^1 pada titik u_3^2 dan u_5^2, titik u_5^1 pada titik u_4^2 dan u_6^2, dan titik u_6^1 pada titik u_5^2 yang akan membentuk suatu graf seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 2.19 berikut ini.



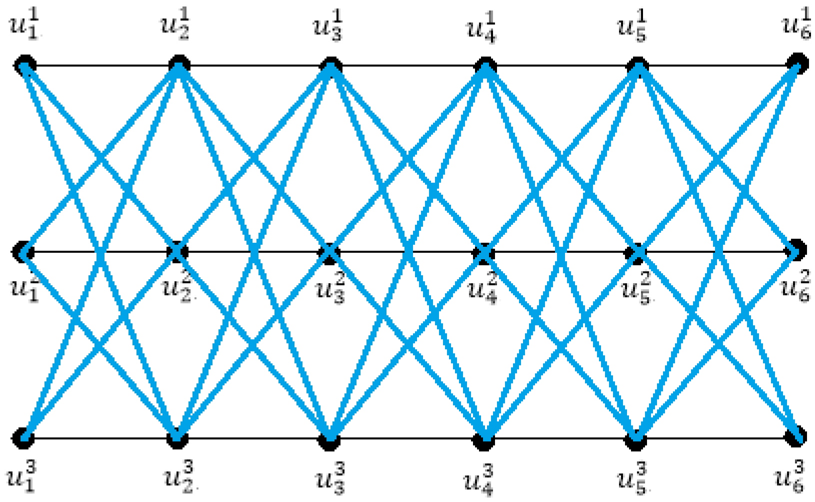
Gambar 2.19 Menghubungkan titik u_i^1 di P_6^1 pada tetangga dari titik u_i^2 di P_6^2 yang berpadanan dengan u_i^1.

Langkah ketiga, hubungkanlah setiap titik u_i^2 di P_6^2 pada tetangga dari titik u_i^3 di P_6^3 yang berpadanan dengan u_i^2, yaitu u_1^2 pada u_2^3, u_2^2 pada u_1^3 dan u_3^3, u_3^2 pada u_2^3 dan u_4^3, u_4^2 pada titik u_3^3 dan u_5^3, titik u_5^2 pada titik u_4^3 dan u_6^3, dan titik u_6^2 pada titik u_5^3 yang akan membentuk suatu graf seperti yang ditunjukkan dalam gambar di bawah ini.



Gambar 2.20 Menghubungkan titik u_i^2 di P_6^2 pada tetangga dari titik u_i^3 di P_6^3 yang berpadanan dengan u_i^2.

Langkah selanjutnya, hubungkanlah setiap titik u_i^1 di P_6^1 pada tetangga dari titik u_i^3 di P_6^3 yang berpadanan dengan u_i^1, yaitu u_1^1 pada u_2^3, u_2^1 pada u_1^3 dan u_3^3, u_3^1 pada u_2^3 dan u_4^3, u_4^1 pada titik u_3^3 dan u_5^3, titik u_5^1 pada titik u_4^3 dan u_6^3, dan titik u_6^1 pada titik u_5^3 yang akan membentuk suatu graf 3-bayangan dari graf P_6 seperti yang ditunjukkan dalam gambar di bawah ini.



Gambar 2.21 Graf 3-bayangan P_6.

2.4 Pelabelan Graf

Tugas akhir ini membahas tentang salah satu jenis pelabelan graf yaitu pelabelan *analytic mean*. Oleh karena itu terlebih dahulu diperlukan pemahaman tentang pelabelan graf yang akan dijelaskan di bawah ini:

Definisi 2.4.1 Pelabelan graf [2] : Pelabelan graf adalah suatu pemetaan yang memasangkan elemen-elemen graf yaitu titik dan sisi pada himpunan bilangan, biasanya bilangan non-negatif atau bilangan bulat positif. Jika domainnya adalah himpunan titik, maka pelabelannya disebut pelabelan titik. Jika domainnya adalah himpunan sisi, maka pelabelannya disebut pelabelan sisi. Jika domainnya adalah gabungan dari himpunan titik dan himpunan sisi, maka pelabelannya disebut pelabelan total.

2.5 Pelabelan *Mean*

Sebelum menjelaskan mengenai pelabelan analytic mean, terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai pelabelan *mean* yang merupakan konsep awal dari pelabelan *analytic mean*.

Definisi 2.5.1 Pelabelan *mean* [15] : Misalkan $G(V,E)$ adalah suatu graf dengan banyaknya titik p dan banyaknya sisi q. Suatu fungsi f dikatakan pelabelan *mean* dari graf G jika $f: V(G) \longrightarrow \{0,1,2,\dots,q\}$ adalah injektif dan fungsi akibat $f^*: E(G) \longrightarrow \{1,2,\dots,q\}$ yang didefinisikan dengan:

$$f^*(e = uv) = \begin{cases} \dfrac{f(u)+f(v)}{2} & ;\text{jika } f(u)+f(v) \text{adalah genap} \\ \dfrac{f(u)+f(v)+1}{2} & ;\text{jika } f(u)+f(v) \text{adalah ganjil} \end{cases}$$

adalah bijektif. Graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan *mean* disebut dengan graf *mean*.

Pelabelan *mean* pertama kali diperkenalkan oleh Somasundaram pada tahun 2003 dan berbagai macam graf khusus seperti P_n, C_n, $P_n \times P_m$, $P_n \times C_m$, $K_{1,n}$ untuk $n \le 3$, $B_{n,n}$ dan lain sebagainya telah dibuktikan sebagai graf *mean*.

2.6 Pelabelan *Analytic Mean*

Pelabelan *analytic mean* merupakan salah satu pengembangan dari pelabelan *mean*, definisinya diberikan berikut ini.

Definisi 2.6.1 Pelabelan *analytic mean* [12] : Suatu fungsi f dikatakan pelabelan *analytic mean* jika mungkin untuk melabeli setiap titik v di V dengan label yang berbeda dari $0,1,2,\dots,p-1$ sedemikian sehingga jika $e = uv$ dilabeli dengan pelabelan sisi $f^*(e = uv) = \frac{|[f(u)]^2-[f(v)]^2|}{2}$ jika $|[f(u)]^2 - [f(v)]^2|$ adalah genap dan $f^*(e = uv) = \frac{|[f(u)]^2-[f(v)]^2|+1}{2}$ jika $|[f(u)]^2 - [f(v)]^2|$ adalah ganjil, maka tidak ada dua sisi berbeda yang memperoleh label yang sama.

Definisi 2.6.2 Graf *analytic mean* [12] : Graf G dikatakan sebagai graf *analytic mean* jika G dapat dilabeli dengan pelabelan *analytic mean*.

Untuk lebih memahami materi tentang pelabelan *analytic mean* perhatikanlah contoh di bawah ini.

Contoh 2.18 : Suatu graf *analytic mean* $K_{1,6}$ dapat dilabeli dengan pelabelan *analytic mean* dengan cara berikut.

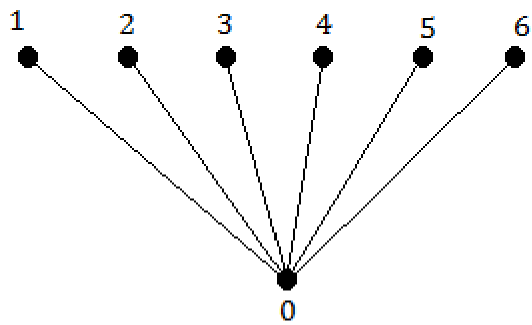
Misalkan $V(K_{1,6}) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ dan

$$E(K_{1,6}) = \{u_1u_7, u_2u_7, u_3u_7, u_4u_7, u_5u_7, u_6u_7\}$$

Dapat didefinisikan suatu pelabelan titik $f: V(K_{1,6}) \longrightarrow \{0,1,2,3,4,5,6\}$ dengan $f(u_i) = i\,, 1 \leq i \leq 6$ dan $f(u_7) = 0$, sehingga diperoleh pelabelan titik untuk $K_{1,6}$ sebagai berikut:

$f(u_1) = 1\,,\ f(u_2) = 2\,,\ f(u_3) = 3\,,\ f(u_4) = 4\,,\ f(u_5) = 5\,,\ f(u_6) = 6\,,$ dan $f(u_7) = 0$

Untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 2.22 berikut.



Gambar 2.22 Pelabelan titik pada graf $K_{1,6}$.

Misalkan f^* adalah pelabelan sisi dari pelabelan titik f, maka sesuai definisi pelabelan *analytic mean* di atas pelabelan sisinya adalah sebagai berikut:

$$f^*(u_1u_7) = \frac{|1^2 - 0^2| + 1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$f^*(u_2u_7) = \frac{|2^2 - 0^2|}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

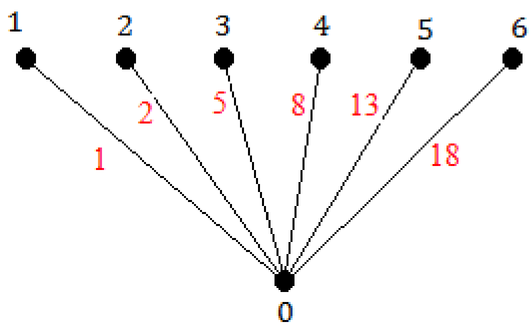
$$f^*(u_3u_7) = \frac{|3^2 - 0^2| + 1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$$

$$f^*(u_4u_7) = \frac{|4^2 - 0^2|}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$f^*(u_5u_7) = \frac{|5^2 - 0^2| + 1}{2} = \frac{25+1}{2} = 13$$

$$f^*(u_6u_7) = \frac{|6^2 - 0^2|}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.23 Pelabelan sisi pada graf $K_{1,6}$.

Berdasarkan pelabelan tersebut, semua sisi yang ada pada graf $K_{1,6}$ memperoleh label yang berbeda. Dengan demikian terbukti bahwa f adalah suatu pelabelan *analytic mean* dan graf $K_{1,6}$ adalah suatu graf *analytic mean*.

Dalam tugas akhir ini akan dibuktikan beberapa graf khusus lain yang termasuk dalam graf *analytic mean.*