

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu kajian dari bidang matematika yang mempelajari tentang titik dan sisi. Teori graf pertama kali ditemukan oleh Euler pada tahun 1736, saat ia berhasil memecahkan suatu permasalahan yang disebut *Konigsberg bridge problem*. Sejak saat itu, teori graf terus berkembang hingga saat ini, bahkan penerapannya tidak hanya dalam bidang matematika, tetapi mencakup pada bidang lainnya seperti, komputer, kesehatan, biologi dan sosiologi.

Salah satu bahasan dalam teori graf yang terus berkembang adalah pelabelan graf, yaitu fungsi yang memetakan elemen himpunan titik atau himpunan sisi ke suatu bilangan yang disebut label. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlãčk (1964), kemudian Stewart (1966), serta Kotzig dan Rosa (1970). Jika dilihat dari domainnya, pelabelan graf dibagi menjadi tiga bagian, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik adalah pelabelan yang domainnya himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan yang domainnya himpunan sisi, sedangkan pelabelan total adalah pelabelan yang domainnya gabungan dari himpunan titik dan himpunan sisi.

Oleh S. Somasundaram dan R. Ponraj pada tahun 2003 [10], diperkenalkan salah satu jenis pelabelan graf, yaitu pelabelan *mean*. Misalkan  $G(V, E)$  adalah suatu graf dengan banyaknya titik  $p$  dan banyaknya sisi  $q$ . Suatu fungsi  $f$  dikatakan pelabelan *mean* dari graf  $G$  jika  $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q\}$  adalah injektif dan fungsi akibat  $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$  yang didefinisikan dengan  $f^*(e = uv) = \frac{f(u)+f(v)}{2}$  jika  $f(u) + f(v)$  adalah genap dan  $f^*(e = uv) = \frac{f(u)+f(v)+1}{2}$  jika  $f(u) + f(v)$  adalah ganjil adalah bijektif.

Dalam perkembangannya, terdapat berbagai macam pelabelan *mean*, seperti pelabelan *even mean*, pelabelan *odd mean*, pelabelan *harmonic mean*, dan pelabelan *skolem difference mean*. Pada perkembangan selanjutnya, ditemukan pelabelan *analytic mean* oleh T. Tharmaraj dan P. B. Sarasija dalam makalah yang berjudul “*Analytic Mean Graphs*” [11].

Suatu fungsi  $f$  dikatakan pelabelan *analytic mean* jika mungkin untuk melabeli setiap titik  $v$  di  $V$  dengan label yang berbeda dari  $0, 1, 2, \dots, p - 1$  sedemikian sehingga jika  $e = uv$  dilabeli dengan pelabelan sisi  $f^*(e = uv) = \frac{|[f(u)]^2 - [f(v)]^2|}{2}$  jika  $|[f(u)]^2 - [f(v)]^2|$  adalah genap dan  $f^*(e = uv) = \frac{|[f(u)]^2 - [f(v)]^2| + 1}{2}$  jika  $|[f(u)]^2 - [f(v)]^2|$  adalah ganjil, maka tidak ada dua sisi berbeda yang memiliki label yang sama.

Pelabelan *analytic mean* yang dikaji oleh T. Tharmaraj dan P. B. Sarasija telah diterapkan pada graf lingkaran  $C_n$ , graf lintasan  $P_n$ , graf bintang  $K_{1,n}$ , graf bistar  $B_{n,n}$ , graf ladder  $L_n$ , graf kipas  $f_{2n+1}$ , graf sisir  $P_n \odot K_1$ ,  $C_n \odot K_1$ ,  $L_n \odot K_1$ ,  $f_{2n+1} \odot K_1$ , graf  $C_n^{(2)}$ , dan jumlah dari dua buah salinan graf  $C_n$  pada makalah yang berjudul “*Analytic Mean Graphs*” [11]. Dalam makalah lain, yang berjudul “*Analytic Mean Labelled Graphs*” [12] T. Tharmaraj dan P. B. Sarasija juga telah membuktikan bahwa graf  $C_m \cup S_n$ , dua buah graf  $C_n$  yang sama yang berbagi satu sisi, graf *triangular snake*  $T_n$  ( $n \geq 5$ ), graf *double triangular snake*  $D(T_n)$  ( $n \geq 5$ ), graf *triple triangular snake*  $T(T_n)$  ( $n \geq 5$ ), graf  $mC_4$  ( $m \geq 4$ ), graf  $mK_2$ , graf  $P_m \cup P_n$ , graf  $2C_n$ , dan graf  $B_{n,n}^2$  adalah graf *analytic mean*. Selain itu, P. Lawrence Rozario Raj dan K. Vivek juga menambahkan bahwa graf  $S'(K_{1,n})$ , graf lingkaran  $C_n$  yang dioperasikan dengan duplikasi elemen graf, dan graf tadpole adalah suatu graf *analytic mean* pada makalah yang berjudul “*Analytic Mean Labeling of Cycle Related Graphs*” [8].

Dari hasil penelitian-penelitian tersebut, pelabelan *analytic mean* masih belum diterapkan pada graf-graf khusus lainnya seperti graf bayangan dari graf bintang dan graf bistar. Namun, dalam jurnal “*New Mean Graphs*”, telah dibuktikan bahwa graf bayangan dari graf bintang dan graf bayangan dari graf bistar adalah suatu graf *mean*, yaitu bisa diterapkan pelabelan *mean*.

Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengambil tema tugas akhir ini tentang pelabelan *analytic mean* pada graf bintang dan graf bistar yang telah dioperasikan dengan operasi graf bayangan.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah tersebut, maka permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah bagaimana pelabelan *analytic mean* pada graf bintang  $K_{1,n}$  dan graf bistar  $B_{n,n}$  yang telah dioperasikan dengan operasi graf bayangan?.

## 1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini dibatasi pada pembahasan mengenai pelabelan *analytic mean* pada graf bintang  $K_{1,n}$  dan graf bistar  $B_{n,n}$  yang telah dioperasikan dengan operasi graf bayangan.

## 1.4 Tujuan dan Manfaat

Adapun tujuan dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut.

1. Mengoperasikan graf bintang  $K_{1,n}$  dan graf bistar  $B_{n,n}$  dengan operasi graf bayangan.
2. Melakukan pelabelan *analytic mean* pada graf bintang  $K_{1,n}$  dan graf bistar  $B_{n,n}$  dengan operasi graf bayangan.

Adapun manfaat dari tugas akhir ini yaitu sebagai salah satu hasil penelitian yang dapat memperluas wawasan mengenai pelabelan *analytic mean*, dan dapat menjadi referensi tambahan bagi matematikawan yang tertarik dalam bidang teori graf.

## 1.5 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut.

### 1. Studi literatur

Studi literatur tersebut dilakukan dengan mengumpulkan dan mengkaji bahan-bahan referensi yang mendukung pengerjaan penelitian.

### 2. Penelitian

Pada tahap penelitian, penulis menganalisis dan melakukan penelitian dalam menerapkan pelabelan *analytic mean*, yaitu dengan melakukan pelabelan titik  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$  pada graf bintang  $K_{1,n}$  dan graf bistar  $B_{n,n}$  yang telah dioperasikan dengan operasi graf bayangan, sedemikian sehingga dapat didefinisikan suatu pelabelan sisi  $f^*(e = uv) = \frac{|[f(u)]^2 - [f(v)]^2|}{2}$  jika  $|[f(u)]^2 - [f(v)]^2|$  adalah genap dan  $f^*(e = uv) = \frac{|[f(u)]^2 - [f(v)]^2| + 1}{2}$  jika  $|[f(u)]^2 - [f(v)]^2|$  adalah ganjil, dimana tidak ada sisi berbeda yang memiliki label yang sama, terpenuhi.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari empat bab yaitu sebagai berikut.

### **BAB I: PENDAHULUAN**

Bab ini memuat latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metode penelitian, sistematika penulisan, dan kerangka berpikir.

### **BAB II: LANDASAN TEORI**

Pada bab ini dijelaskan teori-teori dasar yang berkaitan dengan pelabelan *analytic mean*.

### **BAB III: PEMBAHASAN**

Pada bab ini akan dipaparkan kajian utama tugas akhir ini yaitu operasi graf bayangan pada graf bintang  $K_{1,n}$  dan graf bistar  $B_{n,n}$  serta melakukan pelabelan *analytic mean* pada graf bintang  $K_{1,n}$  dan graf bistar  $B_{n,n}$  yang telah dioperasikan dengan operasi graf bayangan.

### **BAB IV: PENUTUP**

Bab ini memuat kesimpulan dari laporan tugas akhir ini secara keseluruhan, serta saran untuk penelitian yang bisa dilaksanakan selanjutnya.