FI19104
Pengantar Fisika Matematika

Materi Minggu ke-5

Dr. Bebeh Wahid Nuryadin, M.Si

UIN Sunan Gunung Djati Bandung

Ganjil 2020

Sasaran Kuliah Hari Ini

2.9 Diferensial dan Hampiran

Memahami konsep diferensial dan menggunakan-nya untuk menentukan nilai hampiran dari suatu fungsi di titik yang diberikan.

3.1 Maksimum dan Minimum

Menentukan nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi yang diberikan.

Diferensial

Misalkan $y = f(x)$ mempunyai turunan di x, dan $dx := \Delta x$ menyatakan **diferensial** *peubah bebas* x. Maka, diferensial *peubah tak bebas* y didefinisikan sebagai

$$dy := f'(x)\, dx.$$

Berbeda dengan $dx = \Delta x$, di sini dy hanya merupakan **hampiran** untuk Δy [ingat: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$], shg

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\, dx,$$

asalkan $\Delta x \approx 0$.

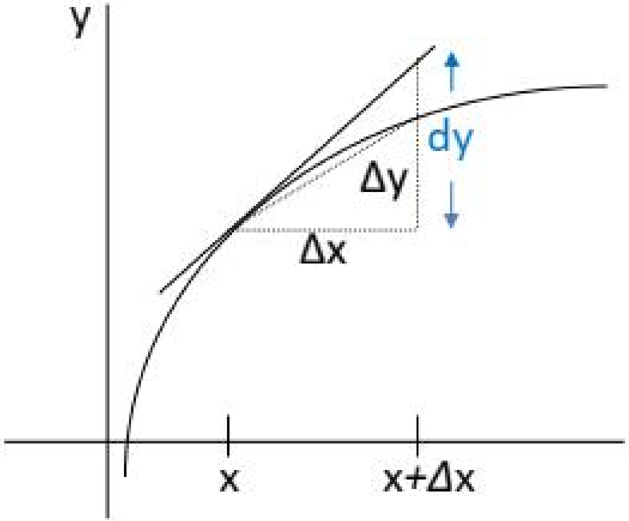
Diferensial

Pada gambar di samping:

$dx = \Delta x$

$dy = f'(x)\, dx$

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$,



dan bila $\Delta x \approx 0$, maka

$\Delta y \approx dy$

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$.

Contoh 1

Misal kita ingin menghampiri nilai $\sqrt{4,1}$.
Tinjau $y = f(x) = \sqrt{x}$. Maka $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, shg

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + 1/(2\sqrt{x}).\Delta x.$$

Khususnya, untuk $x = 4$ dan $\Delta x = 0,1$, kita peroleh

$$\sqrt{4,1} \approx \sqrt{4} + 1/(2\sqrt{4}).(0,1) = 2 + 0,025 = 2,025.$$

Contoh 2

Jari-jari sebuah lingkaran diukur $10 \pm 0,1$ cm. Taksirlah kesalahan yang terjadi dalam peng-hitungan luas lingkaran tsb.

Jawab: Luas lingkaran $L = \pi r^2 \approx 100\pi$ cm^2. Untuk menaksir kesalahannya, kita gunakan $dL = 2\pi r.dr$.

Jadi kesalahan dalam penghitungan luas lingkaran tsb adalah

$$\Delta L \approx 2\pi(10)(\pm 0,1) = \pm 2\pi \text{ cm}^2.$$

Latihan

1. Dengan menggunakan diferensial, taksirlah nilai $\frac{1}{0,51}$.
2. Sebuah bola plastik mempunyai diameter 10 cm. Bila tebal plastik tersebut adalah 0,2 cm, taksirlah volume udara di dalam bola tersebut dengan menggunakan diferensial. [Gunakan juga taksiran $\pi \approx 22/7$.]

Maksimum dan Minimum

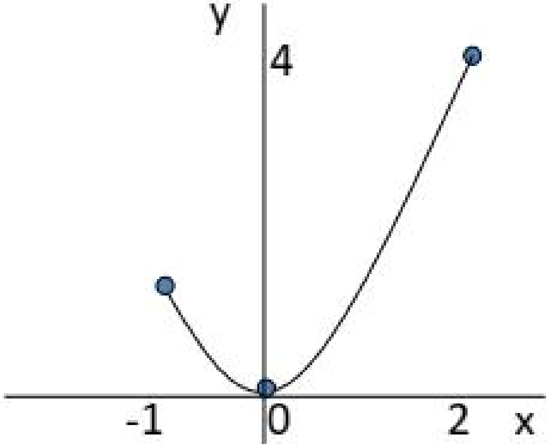
Misalkan $f : I \to \mathbf{R}$ dan $c \in I$. (Pada umumnya, I merupakan suatu selang di **R**).

Nilai $f(c)$ disebut **nilai maksimum** apabila $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in I$.

Nilai $f(c)$ disebut **nilai minimum** apabila $f(c) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in I$.

Nilai maksimum atau minimum disebut **nilai ekstrim**.

Contoh 1. Misalkan $f(x) = x^2$, $x \in [-1,2]$. Nilai maksimumnya adalah 4 [= $f(2)$], sedangkan nilai minimumnya adalah 0 [= $f(0)$]. Perhatikan grafiknya.



Teorema Eksistensi Nilai Ekstrim

Jika f kontinu pada $[a,b]$, maka f akan mencapai nilai maksimum dan minimum pada $[a,b]$.

Catatan. Teorema ini mengatakan bahwa kekontinuan pada selang tutup merupakan *syarat cukup* untuk *eksistensi* nilai ekstrim (maksimum *dan* minimum).

Sbg contoh, fungsi pada Contoh 1 merupakan fungsi yang kontinu pada [-1,2], shg mempunyai nilai maksimum dan minimum pada [-1,2].

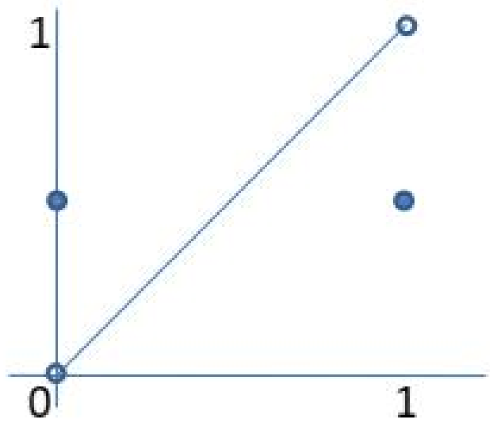
Contoh 2. Fungsi yang tidak kontinu mungkin saja mempunyai nilai ekstrim. Sebagai contoh, fungsi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -1, \quad \text{jika } x = 0, \\
&= x, \quad \text{jika } 0 < x < 1, \\
&= 2, \quad \text{jika } x = 1,
\end{aligned}
$$

mempunyai nilai maksimum 2 [$= f(1)$] dan nilai minimum -1 [$= f(0)$]. Gambar grafiknya!

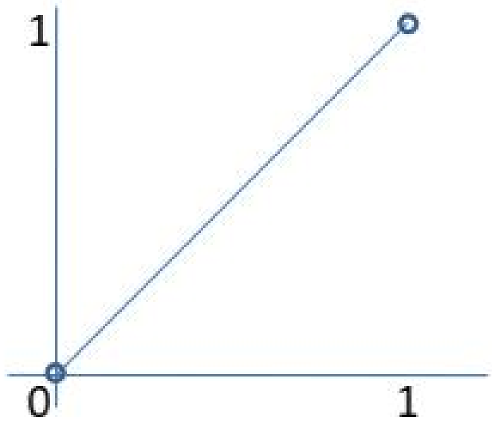
Contoh 3a. Ketakkontinuan *tidak menjamin* eksistensi nilai ekstrim. Sebagai contoh, fungsi

$$g(x) = \tfrac{1}{2}, \quad \text{jika } x = 0 \text{ atau } 1,$$
$$\quad\;\; = x, \quad \text{jika } 0 < x < 1,$$



tidak mempunyai nilai ekstrim, baik maksimum maupun minimum.

Contoh 3b. Kekontinuan pada selang buka *tidak menjamin* eksistensi nilai ekstrim. Sebagai contoh, fungsi



$$g(x) = x, \quad 0 < x < 1,$$

tidak mempunyai nilai ekstrim, baik maksimum maupun minimum.

Teorema Lokasi Titik Ekstrim

*Misalkan daerah asal f adalah selang I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah nilai ekstrim, maka c haruslah merupakan **titik kritis**, yakni c merupakan*

*(i) **titik ujung** selang I,*

*atau (ii) **titik stasioner** f, yakni $f'(c) = 0$,*

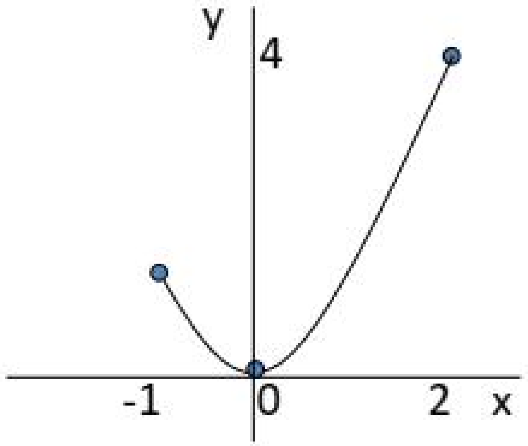
*atau (iii) **titik singular** f, yakni $f'(c)$ tidak ada.*

<u>Catatan.</u> Teorema ini mengatakan bahwa nilai ekstrim hanya mungkin tercapai di titik kritis, karena itu teorema ini dikenal pula sebagai **Teorema Titik Kritis.**

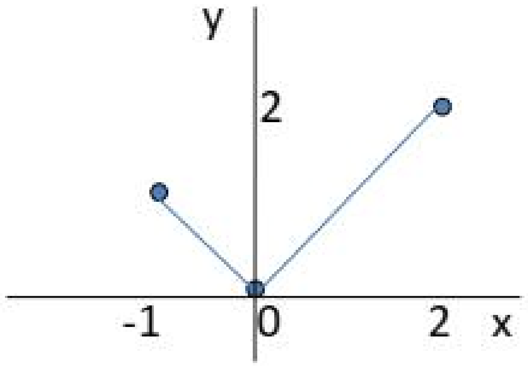
Untuk menentukan nilai ekstrim suatu fungsi, teorema ini menganjurkan utk mencari titik-titik kritisnya dulu.

Contoh

4. Fungsi $f(x) = x^2$, $x \in [-1,2]$, mencapai nilai maksimum 4 di $x = 2$ (titik ujung kanan) dan nilai minimum 0 di $x = 0$ (titik stasioner).



5. Fungsi $f(x) = |x|$, $x \in [-1,2]$, mencapai nilai maksimum 2 di $x = 2$ (titik ujung kanan) dan nilai minimum 0 di $x = 0$ (titik singular).



Contoh 6. Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$ pada $[-1,2]$.

Jawab: Turunan f adalah $f'(x) = -6x^2 + 6x = 6x(1 - x)$. Jadi titik stasionernya adalah 0 dan 1, sedangkan titik singularnya tidak ada. Dengan demikian terdapat empat titik kritis, yakni -1, 0, 1, dan 2 (dua titik ujung selang dan dua titik stasioner).

Menurut Teorema Eksistensi Nilai Ekstrim dan Teorema Lokasi Titik Ekstrim, f mencapai nilai ekstrim di titik kritis tsb. Sekarang bandingkan nilai f di titik-titik kritis tsb:

$$f(-1) = 6, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = -3.$$

Jadi f mencapai nilai maksimum 6 di $x = -1$ (titik ujung kiri) dan nilai minimum -3 di $x = 2$ (titik ujung kanan).

Latihan

1. Tentukan nilai ekstrim fungsi $f(x) = x^3 - 12x$ pada $[-3,3]$.
2. Tentukan titik-titik kritis fungsi

$$g(x) = \begin{cases} 50x - x^2/2, & \text{jika } 0 \le x \le 20, \\ 60x - x^2, & \text{jika } 20 < x \le 60. \end{cases}$$

Tentukan nilai maksimum dan minimumnya.

[Asal-muasal fungsi ini akan dijelaskan di papan tulis.

Ingat baik-baik fungsi ini; nanti akan ketemu lagi!]

Kuliah Hari Ini

3.1 Maksimum dan Minimum

Menentukan nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi yang diberikan.

3.2 Kemonotonan dan Kecekungan

Menentukan selang kemonotonan (dan titik ekstrim), serta selang kecekungan dan titik belok, dari suatu fungsi yang diberikan.

3.3 Maksimum dan Minimum Lokal

Menentukan nilai maksimum dan minimum lokal dari suatu fungsi yang diberikan.

Kemonotonan

Fungsi f dikatakan **naik** pada selang I apabila untuk setiap $x, y \in I$ dengan $x < y$ berlaku

$$f(x) < f(y).$$

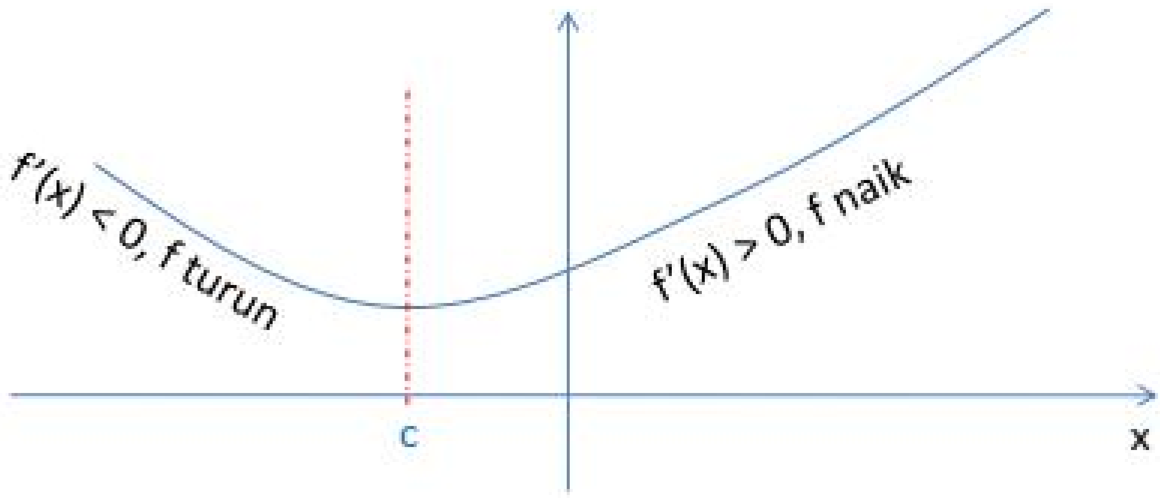
Fungsi f dikatakan **turun** pada selang I apabila untuk setiap $x, y \in I$ dengan $x < y$ berlaku

$$f(x) > f(y).$$

Fungsi naik atau turun pada selang I dikatakan **monoton** pada I.

Teorema Kemonotonan Fungsi

Misalkan f kontinu dan mempunyai turunan pada $I = (a,b)$. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$, maka f naik pada I. Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$, maka f turun pada I.



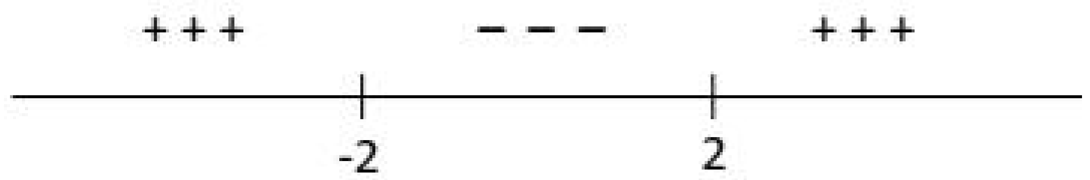
Catatan. Pada gambar di samping, titik c merupakan titik minimum.

Contoh 1

Diketahui $f(x) = x^3 - 12x$. Kita hitung turunannya:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2).$$

Periksa tanda $f'(x)$ pada garis bilangan real:



Menurut Teorema Kemonotonan, fungsi f naik pada $(-\infty,-2)$ dan juga pada $(2,\infty)$; dan f turun pada $(-2,2)$.
[<u>Ctt</u>. $x = -2$ titik maks lokal, $x = 2$ titik min lokal → §3.4.]

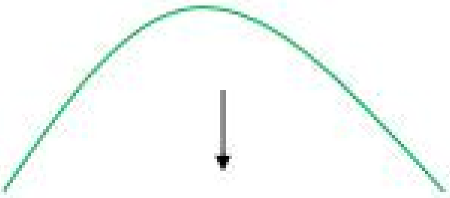
Kecekungan

Misalkan f mempunyai turunan pada $I = (a,b)$.

Jika f' naik pada I, maka grafik fungsi f **cekung ke atas** pada I.

Jika f' turun pada I, maka grafik fungsi f **cekung ke bawah** pada I.

cekung ke atas

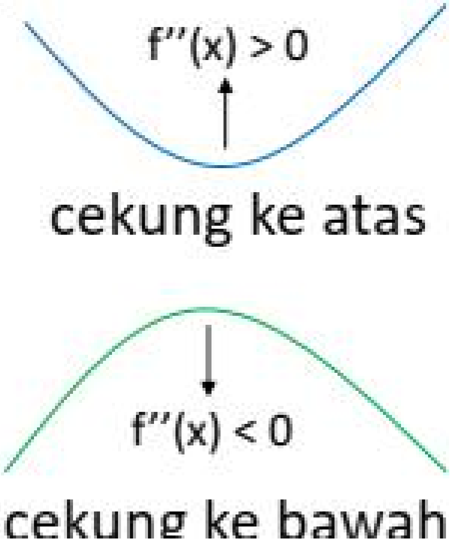


cekung ke bawah

Teorema Kecekungan Fungsi

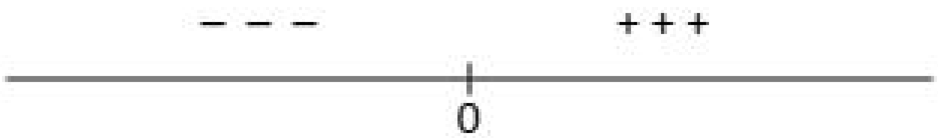
Misalkan f mempunyai turunan kedua pada I. Jika $f''(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$, maka grafik fungsi f cekung ke atas pada I. Jika $f''(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$, maka grafik fungsi f cekung ke bawah pada I.

<u>Penjelasan</u>. Jika $f''(x) > 0$, maka $f'(x)$ naik. Jadi f cekung ke atas. Jika $f''(x) < 0$, maka $f'(x)$ turun. Jadi f cekung ke bawah.



Contoh 2

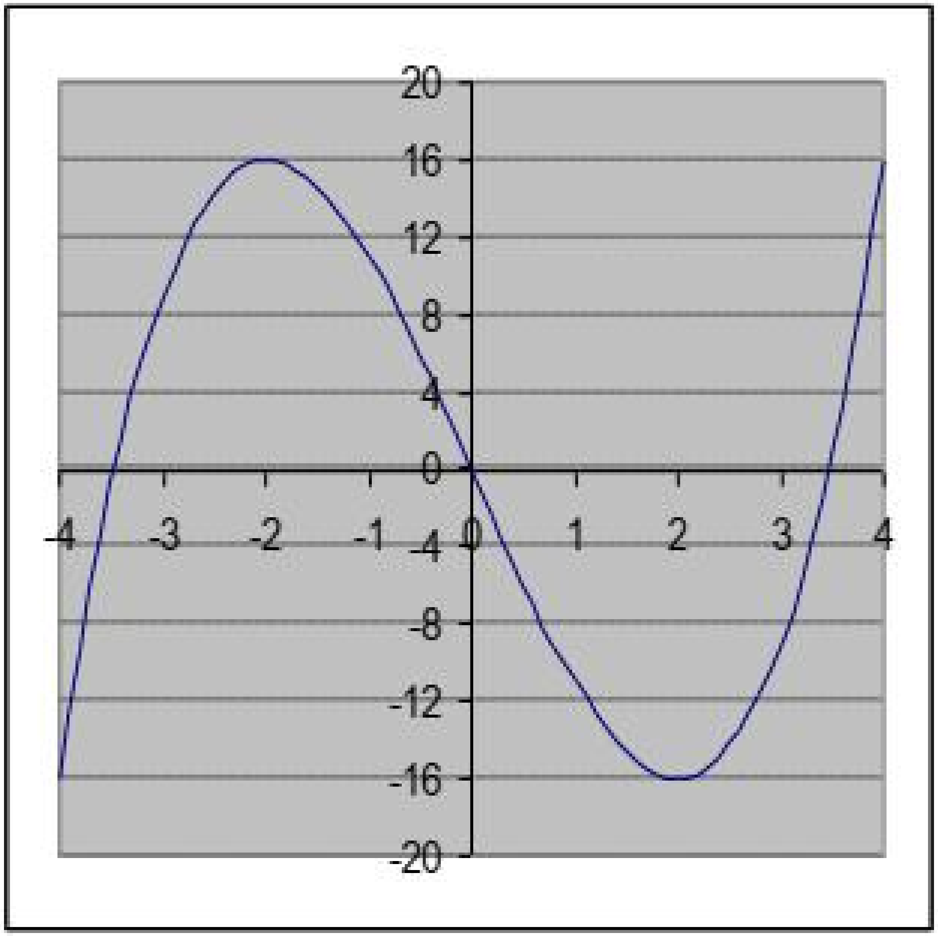
Diketahui $f(x) = x^3 - 12x$. Maka, $f'(x) = 3x^2 - 12$ dan $f''(x) = 6x$. Periksa tanda $f''(x)$:



Menurut Teorema Kecekungan, grafik fungsi f cekung ke atas pada $(0,\infty)$ dan cekung ke bawah pada $(-\infty,0)$.

<u>Catatan</u>. Titik $x = 0$ merupakan **titik infleksi** (**titik belok**) grafik fungsi f. Di titik ini, grafik fungsi f mengalami perubahan kecekungan.

Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 12x$.



Latihan

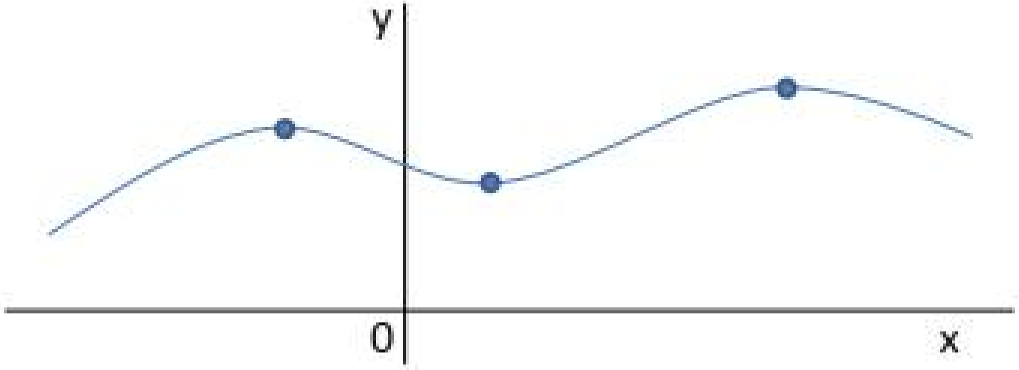
1. Tentukan pada selang mana grafik fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ naik atau turun. Tentukan pula pada selang mana ia cekung ke atas atau cekung ke bawah, serta titik belok-nya, bila ada.
2. Air dituangkan ke dalam tangki berbentuk kerucut terbalik dengan laju 8 dm^3/menit. Jika **tinggi** tangki tersebut adalah 24 dm dan **jari-jari** permukaan atasnya 12 dm, dan tinggi air (h) dipandang sebagai fungsi dari waktu (t), selidiki kemonotonan dan kecekungan grafik fungsi $h(t)$.

Maksimum dan Minimum Lokal

Nilai $f(c)$ disebut **nilai maksimum lokal** f jika terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(c) \geq f(x)$ pada $I \cap (c-\delta, c+\delta)$.

Nilai $f(c)$ disebut **nilai minimum lokal** f jika terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(c) \leq f(x)$ pada $I \cap (c-\delta, c+\delta)$.

Nilai maksimum/minimum lokal disebut **nilai ekstrim lokal**.



Teorema: Uji Turunan Pertama

Misalkan f kontinu di c.

Jika $f'(x) > 0$ di sekitar kiri c dan $f'(x) < 0$ di sekitar kanan c, maka $f(c)$ merupakan nilai maksimum lokal.

Jika $f'(x) < 0$ di sekitar kiri c dan $f'(x) > 0$ di sekitar kanan c, maka $f(c)$ merupakan nilai minimum lokal.

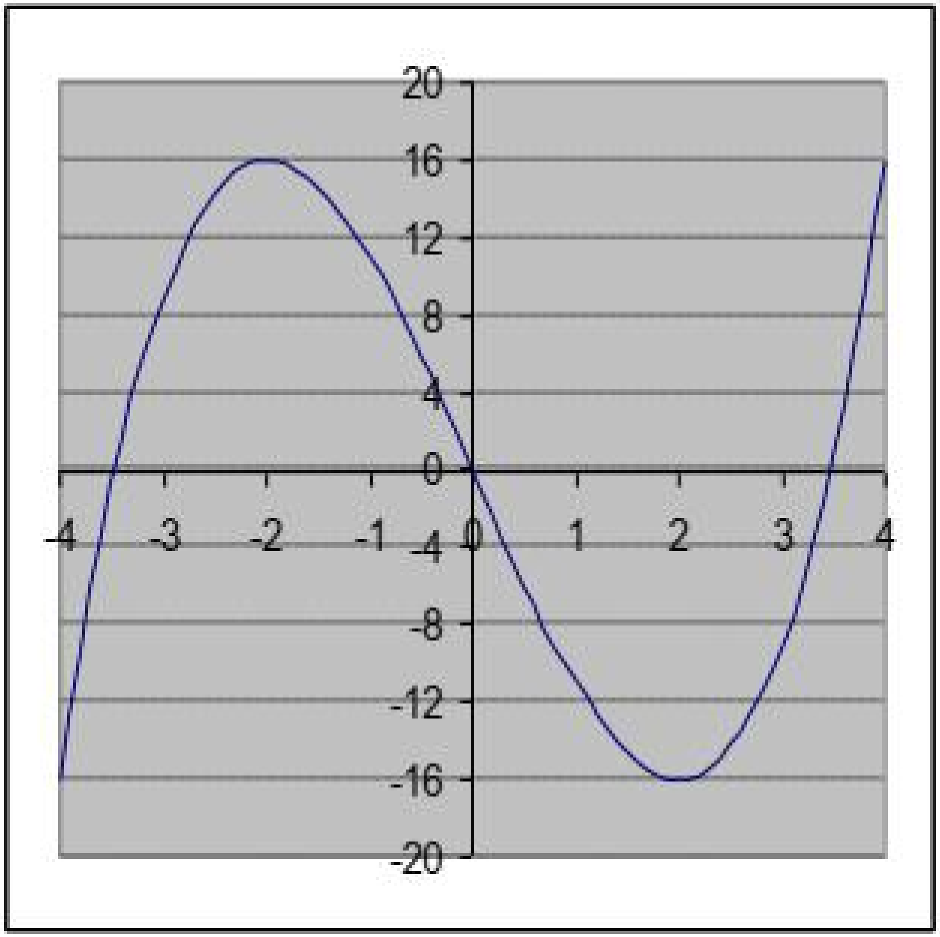
Jika $f'(x)$ bertanda sama di sekitar kiri dan kanan c, maka $f(c)$ bukan merupakan nilai ekstrim lokal.

Contoh. Tentukan nilai maksimum dan minimum lokal $f(x) = x^3 - 12x$.

Jawab: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$ mempunyai tanda sbb:

Menurut Uji Turunan Pertama, $f(-2)$ merupakan nilai maksimum lokal dan $f(2)$ merupakan nilai minimum lokal, sesuai dengan yang kita lihat pada grafiknya.

Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 12x$.



Sekian dan Terima Kasih

- Seluruh materi presentasi di dapatkan dari website perkuliahan Prof. Hendra Gunawan