FI19104
Pengantar Fisika Matematika

Materi Minggu ke-16

Dr. Bebeh Wahid Nuryadin, M.Si
UIN Sunan Gunung Djati Bandung

Ganjil 2020

Sasaran Kuliah Hari Ini

9.1 Barisan Tak Terhingga

Memeriksa kekonvergenan suatu barisan dan, bila mungkin, menghitung limitnya

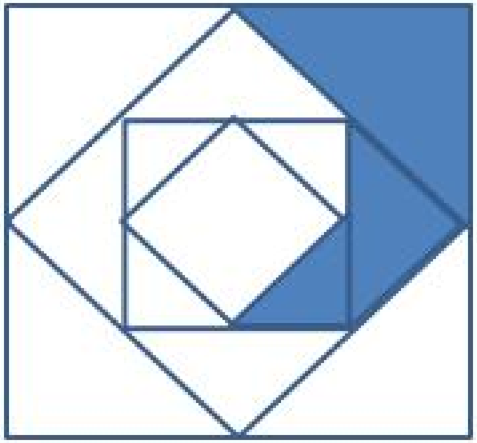
9.2 Deret Tak Terhingga

Memeriksa kekonvergenan suatu deret dan, bila mungkin, menghitung jumlahnya

9.3 Deret Positif: Uji Integral

Memeriksa kekonvergenan **deret positif** dengan **uji jumlah terbatas** dan **uji integral**

Berapa Luas Daerah yang Diarsir?



…. dst.

Deret Tak Terhingga & Hampiran

Dengan turunan pertama, kita mendapatkan hampiran

$$\sin x \approx x, \qquad untuk\, x \approx 0.$$

Bila kita gunakan turunan kedua dan ketiga, kita akan dapatkan hampiran yang lebih baik

$$\sin x \approx x - \tfrac{x^3}{6}, \qquad untuk\, x \approx 0.$$

Kelak kita dapat menunjukkan bahwa

$$\sin x = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \ldots + \ldots, \quad untuk\, x \in \Re.$$

Deret Tak Terhingga & Hampiran

Pertanyaannya adalah: apa arti penjumlahan

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \ldots$$

dan bagaimana mengetahui jumlah tsb ada?

Secara umum, bila $a_n \in \mathbf{R}$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$, apa arti penjumlahan

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$$

dan bagaimana menghitungnya?

Definisi Deret Tak Terhingga

Bentuk penjumlahan

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$$

disebut sebagai **deret tak terhingga** atau singkatnya **deret**, dan biasanya dituliskan dengan notasi sigma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Bagaimana Memaknai Deret

Diberikan suatu deret

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$$

kita dapat menghitung **jumlah parsial**-nya:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\ldots$$

$$S_N = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$$

$$\ldots$$

Dalam hal ini kita peroleh barisan $\{S_N\}$.

Bagaimana Memaknai Deret

Jika $\{S_N\}$ konvergen ke S, maka deret tersebut dikatakan **konvergen** (ke S) dan kita definisikan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \lim_{N\to\infty} S_N = S.$$

Bilangan S disebut sebagai **jumlah** deret tsb.

Deret Geometri

Deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, dengan $a \neq 0$ dan $r \neq 1$,

mempunyai jumlah parsial

$$S_N = \frac{a(1-r^N)}{1-r}.$$

Jika $|r| < 1$, maka $\lim_{N\to\infty} r^N = 0$, dan dalam hal ini

$\lim_{N\to\infty} S_N = \dfrac{a}{1-r}$. Jika $|r| > 1$ atau $r = -1$, $\{S_N\}$ div.

Contoh

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ merupakan deret geometri dengan suku pertama $a = ½$ dan rasio $r = ½$. Jadi deret ini konvergen dan jumlahnya adalah $S = 1$.

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ merupakan deret geometri dengan suku pertama $a = -1$ dan rasio $r = -1$. Jadi deret ini divergen.

Uji Suku ke-n untuk Kedivergenan

Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$ maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

Contoh. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergen karena $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0.$

<u>Catatan</u>. Hati-hati! Walau $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$ belum tentu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen. Contohnya $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$

Deret Harmonik $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Di sini $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$ Tapi deret ini divergen, karena:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Deret Kolaps (Berjatuhan)

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergen, karena

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \quad bila \quad n \to \infty.$$

Teorema Kelinearan Deret

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, dan *c* konstanta,

maka

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$

Catatan

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen dan $c \neq 0$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ divergen.

Sebagai contoh, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n}$ divergen karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen.

Deret Positif

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ disebut **deret positif** apabila $a_n \geq 0$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$. Pada bagian ini, kita hanya akan membahas deret positif.

Teorema (***Uji Jumlah Terbatas***). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen jika dan hanya jika jumlah parsialnya terbatas.

Contoh/Latihan

Buktikan bahwa deret berikut konvergen.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Petunjuk. Periksa keterbatasan jumlah parsial S_n.

Uji Integral

Misalkan f fungsi yang kontinu, tak negatif, dan tak naik pada $[1,\infty)$, dan $a_n = f(n)$. Maka deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergen jika dan hanya jika integral tak wajar

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$$

konvergen.

Contoh

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen, karena integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergen.

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergen jika dan hanya jika $p > 1$.

[Hasil ini mengukuhkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen.]

Latihan

Selidiki apakah deret di bawah ini konvergen atau divergen.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^4}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln(\ln n)}$.

Sasaran Kuliah Hari Ini

9.4 Deret Positif: Uji Lainnya

Memeriksa kekonvergenan deret positif dengan **uji perbandingan** dan **uji rasio**

9.5 Deret Ganti Tanda: Kekonvergenan Mutlak dan Kekonvergenan Bersyarat

Memeriksa kekonvergenan mutlak/bersyarat **deret ganti tanda**

Mengapa Perlu Uji Lainnya

Kita telah mempunyai beberapa ‘senjata’ utk menyelidiki kekonvergenan deret, ada: definisi, sifat deret geometri, teorema kelinearan deret, uji suku ke-*n*, uji jumlah terbatas, dan uji integral (termasuk uji deret-*p*). Namun, kita masih kesulitan menghadapi deret seperti

$$\sum \frac{1}{1+n^4} \quad \text{dan} \quad \sum \frac{2^n}{n!}.$$

Catatan. Di sini kita masih membahas deret positif.

Uji Perbandingan

Misalkan $0 \le a_n \le b_n$ *utk* $n \ge K$ (*utk suatu* $K \in \mathbf{N}$).

(i) Jika $\sum b_n$ *konvergen, maka* $\sum a_n$ *konvergen*.

(ii) Jika $\sum a_n$ *divergen, maka* $\sum b_n$ *divergen*.

<u>Catatan</u>. Kedua pernyataan di atas ekuivalen.

Contoh

Deret $\sum \frac{1}{1+n^4}$ konvergen karena $\frac{1}{1+n^4} \leq \frac{1}{n^4}$

untuk tiap $n \in \mathbf{N}$ dan $\sum \frac{1}{n^4}$ konvergen.

Uji Perbandingan Limit

Misalkan $a_n \geq 0$ *dan* $b_n > 0$ *dan* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

(i) Jika $0 < L < \infty$, *maka* $\sum a_n$ *dan* $\sum b_n$ *sama-sama konvergen atau divergen.*

(ii) Jika $L = 0$ *dan* $\sum b_n$ *konvergen, maka* $\sum a_n$ *konvergen.*

Contoh

Deret $\sum \frac{1}{1+n}$ divergen karena $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} \div \frac{1}{n} = 1$

dan $\sum \frac{1}{n}$ divergen.

Soal

Selidiki kekonvergenan deret $\sum \frac{\ln n}{n^2}$.

Uji Rasio

Misalkan $\sum a_n$ *deret dengan* $a_n > 0$ *dan*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

(i) Jika $\rho < 1$*, maka deret konvergen.*

(ii) Jika $\rho > 1$*, maka deret divergen.*

(iii) Jika $\rho = 1$*, maka uji ini tidak memberikan kesimpulan apapun.*

<u>Catatan</u>. Pada deret geometri, rasionya konstan.

Contoh

Selidiki kekonvergenan deret $\sum \frac{2^n}{n!}$.

<u>Jawab</u>: Kita hitung

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{2^n}{n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

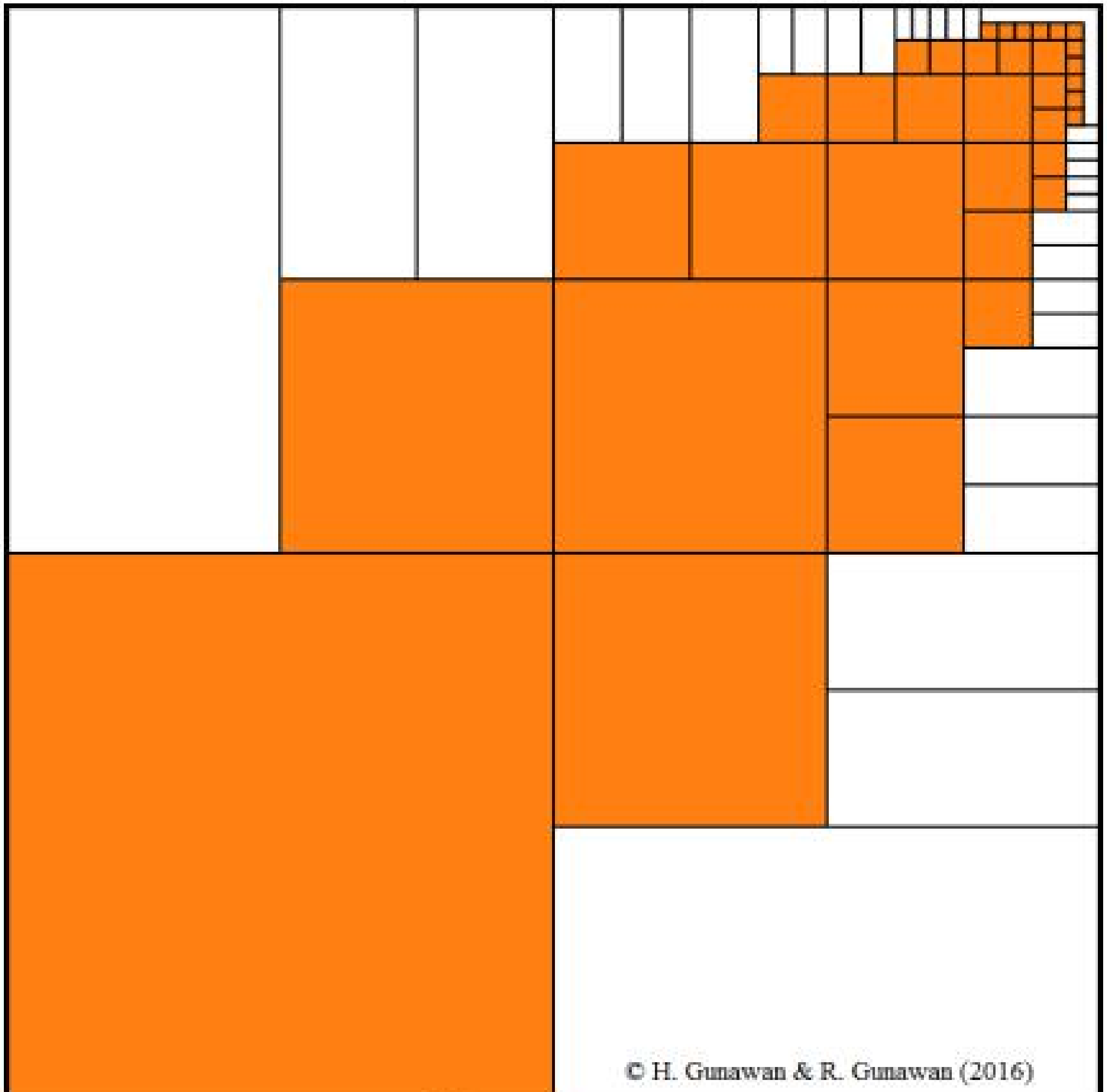
Menurut Uji Rasio, deret $\sum \frac{2^n}{n!}$ konvergen.

Soal

Selidiki kekonvergenan deret berikut:

1. $\sum \frac{n}{2^{n+1}}$.
2. $\sum \frac{n^n}{n!}$.
3. $\sum \frac{n!}{2^n + n}$.

$$\sum \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \ldots = 1.$$



Apa itu Deret Ganti Tanda

Kita telah mempelajari deret positif (dan deret negatif). Sekarang kita tinjau **deret ganti tanda**, yaitu deret berbentuk

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

dengan $a_n > 0$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$. Sebagai contoh, kita akan menyelidiki kekonvergenan **deret harmonik ganti tanda**

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \dots$$

Kekonvergenan Deret Ganti Tanda

Diketahui deret ganti tanda

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

Kita hitung jumlah parsialnya

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = a_1 - a_2 = S_1 - a_2 \\
&S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = S_2 + a_3 \\
&S_4 = \ldots = S_3 - a_4 \\
&dst.
\end{aligned}$$

Misalkan $\{a_n\}$ turun. Maka $S_1, S_3, S_5, \ldots$ turun dan terbatas di bawah, sehingga konvergen, katakan ke S^*. Sementara itu, $S_2, S_4, S_6, \ldots$ naik dan terbatas di atas, sehingga konvergen, katakan ke S^{**}. Baik S^* maupun S^{**} berada di antara S_n dan S_{n+1} (ilustrasi di papan tulis).

Jadi, $$|S^* - S^{**}| \le |S_n - S_{n+1}| = a_{n+1}.$$

Jadi, jika $\lim\limits_{n \to 0} a_n = 0$, maka $S^* = S^{**}$, sehingga deret konvergen ke bilangan yang sama, sebut-lah S. Dapat pula diperiksa bahwa

$$|S - S_n| \le |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1}.$$

Uji Deret Ganti Tanda

Diketahui deret ganti tanda

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

dengan $a_n > a_{n+1} > 0$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$.

Dari pengamatan sebelumnya, kita simpulkan:

Jika $\lim\limits_{n\to 0} a_n = 0$, *maka deret konvergen*.

Lebih jauh, jika jumlahnya ditaksir dengan S_n, *maka kesalahannya tak lebih daripada* a_{n+1}.

Contoh

Deret $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ merupakan deret ganti tanda dengan $a_n = 1/n$ turun dan menuju 0.

Jadi, deret ganti tanda ini konvergen.

Bila kita ingin menaksir jumlahnya dengan kesalahan tak lebih daripada 0.01, maka kita harus menaksirnya dengan S_{99}, yaitu

$$S_{99}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{98}+\frac{1}{99}.$$

Kekonvergenan Mutlak

Teorema. *Diketahui deret* $\sum u_n$ *sembarang.*

Jika $\sum |u_n|$ *konvergen, maka* $\sum u_n$ *konvergen.*

<u>Catatan</u>. Deret $\sum u_n$ dikatakan **konvergen mutlak** apabila $\sum |u_n|$ konvergen.

Kebalikan teorema di atas tidak berlaku: kekonvergenan $\sum u_n$ tidak menjamin kekonvergenan $\sum |u_n|$.

Contoh

Deret $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots$ konvergen mutlak, karena deret

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$

konvergen.

Kekonvergenan Bersyarat

Deret harmonik ganti tanda $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ konvergen, tetapi tidak konvergen mutlak.

Deret $\sum u_n$ yang konvergen tetapi $\sum |u_n|$ tidak konvergen dikatakan **konvergen bersyarat**.

Sebagai contoh, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ merupakan deret yang konvergen bersyarat.

Uji Rasio Mutlak

Misalkan $\sum u_n$ *deret sembarang dengan suku-suku tak nol, dan*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho.$$

(i) Jika $\rho < 1$, *maka deret konvergen mutlak.*

(ii) Jika $\rho > 1$, *maka deret divergen.*

(iii) Jika $\rho = 1$, *maka uji ini tidak memberikan kesimpulan apapun.*

Latihan

Selidiki kekonvergenan deret dan, dalam hal konvergen, tentukan apakah ia konvergen mutlak atau bersyarat.

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}.$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}.$

Sekian dan Terima Kasih

- Seluruh materi presentasi di dapatkan dari website perkuliahan Prof. Hendra Gunawan