

BAB I

PENDAHULUAN

Dalam bab I ini berisi tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan.

1.1. Latar Belakang

Dalam kajian analisis fungsional, terdapat suatu bahasan mengenai ruang Banach. Ruang Banach merupakan konsep fundamental di dalam analisis fungsional yang menjamin setiap barisan konvergen ke suatu vektor di dalam ruang tersebut. Ruang Banach merupakan ruang bernorm lengkap. Dikatakan lengkap jika untuk suatu ruang norm berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di ruang tersebut adalah barisan konvergen. Pada tahun 1992, seorang ahli matematika, Stefan Banach menemukan dan membuktikan teorema yang menyatakan ketunggalan titik tetap. Teorema tersebut dikenal dengan teorema titik tetap Banach. Teorema ini merupakan teorema keberadaan dan ketunggalan dari suatu titik tetap pada suatu pemetaan kontraktif di ruang norm lengkap.

Suatu sistem persamaan linear yang memenuhi kondisi pemetaan kontraktif dapat ditemukan pada perhitungan distribusi suhu dalam keadaan setimbang pada pelat dua dimensi. Keadaan setimbang pada distribusi suhu berarti suhu suatu sistem berada dalam kesetimbangan atau tidak berubah lagi seiring waktu. Distribusi suhu atau yang sering disebut dengan perambatan suhu merupakan perpindahan energi dalam (energi potensial dan kinetik mikroskopik) dari wilayah yang suhunya lebih tinggi ke salah satu wilayah yang suhunya lebih rendah dan disebabkan oleh interaksi partikel seperti atom, molekul, ion, atau elektron di dalam suatu ruangan. Kajian fenomena laju distribusi suhu telah banyak dilakukan dengan menerapkan model konvensional yaitu model analitik dan numerik. Model yang digunakan untuk masalah distribusi suhu pada pelat dua dimensi adalah persamaan Laplace yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

dimana T adalah suhu, serta x dan y adalah arah koordinat.

Dengan asumsi pemanasan yang konstan pada tepi batas pelat dengan suhu 0°C dan 100°C serta disekat sempurna pada kedua sisi permukaannya agar tidak terpengaruh oleh suhu dari luar. Sehingga akan dicari suhu tetap dari perambatan panas di titik-titik dalam pada pelat tersebut pada saat mencapai keseimbangan. Persamaan (1.1) diselesaikan secara numerik dengan pendekatan beda hingga dan membentuk suatu persamaan linear yang berukuran besar. Dalam menyelesaikan permasalahan tersebut, persamaan linear yang memiliki ukuran besar menjadi tidak efisien jika diselesaikan secara analitik. Oleh sebab itu, penyelesaiannya dilakukan secara numerik yaitu dengan metode iterasi.

Teorema titik tetap Banach memiliki peran yang penting dalam metode iterasi. Metode iterasi merupakan salah satu metode yang seringkali digunakan untuk perhitungan numerik. Pembuktian kekonvergenan dan estimasi kesalahan seringkali diperoleh dari aplikasi teorema titik tetap Banach. Teorema ini memberikan syarat cukup untuk keberadaan dan ketunggalan titik tetap suatu pemetaan kontraktif. Hasil dari penyelesaian numerik merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian analitik atau eksak [7]. Metode ini dimulai dengan aproksimasi terdekat dari siklus perhitungan yang diulang-ulang sampai ketelitian yang ingin diperoleh. Metode iterasi pada sistem persamaan linear adalah iterasi Jacobi dan iterasi Gauss-Seidel. Metode iterasi yang digunakan pada skripsi ini adalah metode Gauss-Seidel karena metode ini merupakan modifikasi dari metode Jacobi sehingga kekonvergenannya lebih cepat dibanding metode Jacobi. Metode ini digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan yang berukuran besar dengan proporsi koefisien nolnya besar.

Akan tetapi, tidak setiap persamaan linear dapat diselesaikan dengan metode Gauss-Seidel. Hal tersebut disebabkan karena metode Gauss-Seidel memiliki kondisi atau syarat yang harus dipenuhi agar menjadi konvergen. Sehingga, kondisi-kondisi tersebut perlu dikaji lebih dalam untuk digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linear.

Oleh karena itu, penulis berkeinginan untuk mengkaji lebih lanjut lagi dalam menyelesaikan sistem persamaan linear menggunakan metode Gauss-Seidel pada penerapan teorema titik tetap Banach dengan contoh kasus perhitungan distribusi suhu dalam keadaan setimbang pada pelat dua dimensi ke dalam skripsi

yang berjudul “*Aplikasi Teorema Titik Tetap Banach dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Menggunakan Metode Gauss-Seidel (Contoh Kasus Menghitung Distribusi Suhu pada Pelat Dua Dimensi)*”.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya, skripsi ini memiliki beberapa rumusan masalah, diantaranya :

1. Bagaimana syarat atau kondisi yang harus dipenuhi metode Gauss-Seidel dalam menyelesaikan sistem persamaan linear pada penerapan teorema titik tetap Banach?
2. Bagaimana penyelesaian sistem persamaan linear menggunakan metode Gauss-Seidel sebagai aplikasi teorema titik tetap Banach?

1.3. Batasan Masalah

Kajian skripsi ini memiliki batasan masalah yaitu sebagai berikut :

1. Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah metode Gauss-Seidel.
2. Aplikasi teorema titik tetap Banach pada persamaan linear yang hanya meliputi perhitungan distribusi suhu dalam keadaan setimbang.

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dari skripsi ini diantaranya adalah :

1. Untuk mengkaji kondisi-kondisi yang harus dipenuhi metode Gauss-Seidel dalam menyelesaikan sistem persamaan linear sebagai aplikasi teorema titik tetap Banach.
2. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dalam studi kasus menghitung distribusi suhu pada pelat dua dimensi sebagai aplikasi dari teorema titik tetap Banach.

1.5. Metodologi Penelitian

Metodologi penelitian ini adalah tinjauan pustaka, yakni dengan mencari serta mengkaji beberapa literatur yang berkaitan dengan topik teorema titik tetap

Banach serta aplikasinya dalam bidang lain baik berupa buku, artikel, ataupun jurnal internasional.

1.6. Sistematika Penulisan

Berdasarkan sistematika penulisannya, skripsi ini terdiri atas lima bab beserta daftar pustaka, dimana dalam setiap bab terdapat beberapa subbab yang bersangkutan, yaitu sebagai berikut :

BAB I : PENDAHULUAN

Dalam bab ini dipaparkan mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II : LANDASAN TEORI

Dalam bab ini dipaparkan mengenai kajian teori-teori yang melandasi pembahasan dalam skripsi ini, di antaranya barisan dan deret, persamaan linear, teorema titik tetap Banach, metode iterasi Gauss-Seidel, dan distribusi suhu.

BAB III : TEOREMA TITIK TETAP BANACH

Dalam bab ini dipaparkan mengenai pembuktian teorema titik tetap Banach, serta kondisi-kondisi yang harus dipenuhi suatu sistem persamaan linear agar dapat diselesaikan dengan metode Gauss-Seidel.

BAB IV : APLIKASI TEOREMA TITIK TETAP BANACH DALAM MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR MENGGUNAKAN METODE GAUSS-SEIDEL

Dalam bab ini dipaparkan mengenai aplikasi teorema titik tetap Banach dalam persamaan linear dengan studi kasus menghitung distribusi suhu pada pelat dua dimensi dalam keadaan setimbang.

BAB V : SIMPULAN DAN SARAN

Dalam bab ini dipaparkan mengenai kesimpulan hasil analisis serta saran untuk pengembangan penelitian yang lebih baik lagi.