BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Marin Mersenne, seorang Matematikawan Perancis pada abad ke-17, menemukan bahwa bilangan $2^n - 1$ adalah bilangan prima hanya untuk bilangan bulat $n \leq 257$. Kenyataannya, $2^{67} - 1$ dan $2^{257} - 1$ bukan merupakan bilangan prima. Para peneliti berusaha untuk memverifikasi apakah $2^n - 1$ dengan $n > 257$ merupakan bilangan prima atau bukan. Menjadi hal yang penting, jika bilangan prima p dan $2^p - 1$ juga bilangan prima. Berdasarkan hal tersebut, Lenstra, Pomerance, dan Wagstaff menemukan bahwa terdapat bilangan prima p yang tidak terbatas sedemikian sehingga $2^p - 1$ adalah bilangan prima. Bilangan $2^p - 1$ yang demikian disebut bilangan prima Mersenne [4].

Suatu bilangan bulat disebut bilangan sempurna, jika jumlah pembagi positifnya tidak termasuk bilangannya sama dengan bilangan itu sendiri. Salah satu cara untuk membentuk bilangan sempurna melalui bilangan prima Mersenne.

Bilangan prima Mersenne yang membentuk bilangan sempurna adalah bilangan segitiga, karena bentuk bilangan sempurna sama dengan bentuk bilangan segitiga. Teorema Ramanujan-Nagell menyatakan bahwa hanya bilangan terbatas dari bilangan Mersenne yang dapat membentuk bilangan segitiga.

Salah satu dasar untuk memahami pembuktian Teorema Ramanujan-Nagell yaitu dengan memahami ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{-7}$, yang merupakan akar dari persamaan polinomial monik dengan koefisien bilangan bulat, yang membentuk struktur aljabar yaitu ring. Penelitian pada skripsi ini mengkaji mengenai ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, maka skripsi ini disusun berdasarkan pada rumusan masalah berikut.

1. Bagaimana bentuk ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$?
2. Bagaimana daerah faktorisasi tunggal pada ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$?
3. Bagaimana grup unit pada ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$?

1.3 Batasan Masalah

Pada skripsi ini pembahasannya dibatasi mengenai bentuk ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$ dengan K bilangan kuadrat bebas selain 1, dimana $K = -1, \pm 2, \pm 3, 5$. Selanjutnya, membahas mengenai daerah faktorisasi tunggal pada ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$, dan grup unit pada ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan, maka skripsi ini disusun berdasarkan pada tujuan berikut.

1. Untuk memahami bentuk ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$.
2. Untuk memahami daerah faktorisasi tunggal pada ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$.
3. Untuk memahami grup unit pada ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$.

1.5 Metodologi

Pendekatan yang digunakan dalam penyusunan skripsi ini adalah studi literatur dan perancangan. Studi literatur yaitu dengan mempelajari dan menerapkan hasil-hasil dari literatur-literatur berupa jurnal ilmiah maupun literatur berupa buku dan karya tulis ilmiah lainnya berkenaan dengan materi yang hendak dipaparkan pada skripsi ini.

Perancangan ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$ dimulai dengan mencari bentuk ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$. Kemudian mencari bilangan apa yang memenuhi bentuk ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$.

Selanjutnya perancangan untuk mengetahui daerah faktorisasi tunggal pada ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$. Karena setiap daerah Euclid merupakan daerah ideal utama, dan setiap daerah ideal utama merupakan daerah faktorisasi tunggal, maka untuk membuktikan ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$ merupakan daerah faktorisasi tunggal, cukup dengan membuktikan bahwa ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$ merupakan daerah Euclid. Jika memenuhi kedua syarat daerah Euclid, maka ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$ merupakan daerah faktorisasi tunggal. Tetapi jika salah satu syarat dari daerah Euclid tidak terpenuhi, maka ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$ bukan merupakan daerah faktorisasi tunggal.

Selanjutnya, perancangan grup unit pada ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$. Jika suatu elemen memiliki invers terhadap perkalian dalam ring komutatif dengan elemen satuan, maka elemen tersebut disebut unit. Semua unit pada ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$ tersebut kemudian dikelompokkan, dan disebut sebagai grup unit.

1.6 Sistematika Penulisan

Skripsi ini disusun dalam lima bab dengan masing-masing bab dapat diterangkan sebagai berikut.

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan merupakan bab yang berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metodologi, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Landasan teori merupakan bab yang mencakup teori-teori yang diperlukan dalam pembahasan ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$. Teori-teori tersebut meliputi bilangan kuadrat bebas, ring, daerah faktorisasi tunggal, bilangan bulat aljabar, dan lapangan kuadratik.

BAB III RING BILANGAN BULAT ALJABAR DI LAPANGAN KUADRATIK $\mathbb{Q}\sqrt{-7}$

Bab ini berisi pembahasan mengenai bentuk ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{-7}$. Selain itu, pembahasan mengenai daerah faktorisasi tunggal pada ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{-7}$, serta grup unit pada ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{-7}$.

BAB IV RING BILANGAN BULAT ALJABAR DI LAPANGAN KUADRATIK $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ UNTUK $K \leq 5$

Bab ini berisi pembahasan mengenai bentuk ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$. Selain itu, pembahasan mengenai daerah faktorisasi tunggal pada ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$, serta grup unit pada ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ untuk $K \leq 5$.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan yang telah dipaparkan pada bab III dan IV. Selain itu, berisi saran untuk pengembangan atau kelanjutan penelitian yang dapat dilakukan dari skripsi ini. Selanjutnya diakhiri dengan daftar pustaka.