ABSTRAK

Nama : **Epi Nurjanah**

NIM : **1157010021**

Judul : **Ring Bilangan Bulat Aljabar di Lapangan Kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ Untuk $K \leq 5$**

Teorema Ramanujan-Nagell menyatakan bahwa hanya bilangan terbatas dari bilangan Mersenne yang dapat membentuk bilangan segitiga, karena persamaan $x^2 + 7 = 2^a$ memiliki sejumlah solusi bilangan bulat yang terbatas. Untuk memahami pembuktian teorema tersebut, salah satu dasarnya yaitu dengan memahami ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{-7}$ yang dinotasikan dengan $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{-7})}$. Himpunan $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{-7})}$ merupakan akar persamaaan polinomial monik dengan koefisien bilangan bulat yang membentuk struktur aljabar yaitu ring. Skripsi ini mengkaji mengenai ring bilangan bulat aljabar di lapangan kuadratik $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ yang dinotasikan dengan $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{K})}$ untuk $K \leq 5$. Bentuk dari $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{K})}$ untuk $K \leq 5$ terbagi menjadi dua. Pertama, untuk $K \bmod 4 = 1$, bentuk dari $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{K})} = \frac{a+b\sqrt{K}}{2}$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $a \equiv b \; mod\; 2$. Kedua, untuk $K \bmod 4 = 2$ dan $K \bmod 4 = 3$, bentuk dari $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{K})} = k + l\sqrt{K}$ dengan $k, l \in \mathbb{Z}$. Adapun yang termasuk daerah faktorisasi tunggal pada $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{K})}$ untuk $K \leq 5$ yaitu pada saat $K = -1, \pm 2, \pm 3, 5$. Selain itu, grup unit pada $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{K})}$ dengan $K \leq 5$ yang dinotasikan dengan $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}(\sqrt{K})}$ yaitu untuk $K = -1$ maka $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}(\sqrt{K})} = \{-1, 1, -i, i\}$, untuk $K = -3$ maka $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}(\sqrt{K})} = \left\{-1, 1, \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, -\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right), \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, -\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\right\}$, untuk $K = -2, -5$ maka $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}(\sqrt{K})} = \{-1, 1\}$, dan untuk $K = 2, 3, 5$ maka $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}(\sqrt{K})}$ memiliki jumlah yang banyak.

Kata Kunci : Bilangan kuadrat bebas, ring, daerah faktorisasi tunggal, bilangan bulat aljabar, lapangan kuadratik.

ABSTRACT

Name **: Epi Nurjanah**

NIM : 1157010021

Title **: *The Ring of Algebraic Integers in The Quadratic Field $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ For K $\leq$ 5***

Ramanujan-Nagell's theorem stated that only a finite number of Mersenne number can be triangular number, because the equation $x^2 + 7 = 2^a$ has a finite number of integer solutions. To obtain the proof of the theorem, one of the basic is understanding the ring of algebraic integers in the quadratic field $\mathbb{Q}\sqrt{-7}$ or denoted $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{-7})}$. The set of $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{-7})}$ is a root of a monic polynomial with integer coefficients that forms algebraic structure which the name is ring. This research reviewing the ring of algebraic integers in the quadratic field $\mathbb{Q}\sqrt{K}$ denoted by $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{K})}$ for $K \leq 5$. The form of $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{K})}$ for $K \leq 5$ divided into two. The first one, for $K \bmod 4 = 1$, the form of $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{K})} = \frac{a+b\sqrt{K}}{2}$ with $a, b \in \mathbb{Z}$ and $a \equiv b \bmod 2$. The second one, for $K \bmod 4 = 2$ and $K \bmod 4 = 3$, the form of $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{K})} = k + l\sqrt{K}$ with $k, l \in \mathbb{Z}$. As for which is included the unique factorization domain in $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{K})}$ for $K \leq 5$ which is when $K = -1, \pm 2, \pm 3, 5$. Furthermore, the group of units in $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}\,(\sqrt{K})}$ with $K \leq 5$ denoted by $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}(\sqrt{K})}$ which is for $K = -1$ then $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}(\sqrt{K})} = \{-1, 1, -i, i\}$, for $K = -3$ then $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}(\sqrt{K})} = \left\{-1, 1, \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, -\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right), \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, -\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\right\}$, for $K = -2, -5$ then $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}(\sqrt{K})} = \{-1, 1\}$, and for $K = 2, 3, 5$ then $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}(\sqrt{K})}$ has a large number.

Keywords : *Square free number, ring, unique factorization domain, algebraic integer, quadratic field.*