

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Istilah *aljabar* berasal dari kitab yang ditulis sekitar tahun 820 M oleh seorang matematikawan muslim asal Persia yang bernama Muhammad bin Musa Al-Khawarizmi. Kitab tersebut berjudul *Al-Kitab al-Mukhtasar fi hisab al-Jabr wa al-Muqabala* yang diterjemahkan ke dalam Bahasa Inggris menjadi *The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing* [1]. Meskipun istilah *aljabar* baru ditemukan dan digunakan sejak sekitar 820 M, namun sebenarnya aljabar telah muncul dalam dunia matematika sejak ribuan tahun yang lalu. Aljabar kemudian menjadi lebih umum dan abstrak pada tahun 1800-an dengan lebih banyak struktur aljabar yang ditemukan [2].

Beberapa struktur aljabar yang khusus selain ruang vektor adalah ruang quasilinear dan ruang quasivektor. Ruang quasilinear dikatakan sebagai perluasan ruang vektor karena memiliki struktur monoid pembatalan abelian. Adapun konsep ruang quasivektor sebenarnya dibentuk dari struktur grup abelian yang dapat diperoleh dari monoid pembatalan abelian, yaitu struktur yang dimiliki ruang quasilinear. Beberapa contoh dari ruang quasilinear dan ruang quasivektor adalah ruang yang dibentuk dari himpunan berupa *convex bodies*, *zonotopes*, *intervals*, vektor-vektor interval dan fungsi-fungsi, bilangan stokastik, dan sebagainya [3].

Interval-interval tertutup pada  $\mathbb{R}$  merupakan contoh dari *convex bodies*. Himpunan seluruh interval tertutup di  $\mathbb{R}$  dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar tertentu merupakan ruang quasilinear [3,4]. Suatu interval tertutup merupakan objek yang memiliki pusat dan jari-jari konstan sehingga pada  $\mathbb{R}^2$  dapat dijumpai *convex bodies* dengan karakteristik serupa yaitu cakram-cakram lingkaran. Interval dan cakram dengan karakter demikian disebut bola pejal di  $\mathbb{R}$  dan  $\mathbb{R}^2$ . Dengan demikian, Secara umum di  $\mathbb{R}^n$  *convex bodies* dapat berupa bola-bola pejal [5,6].

Ruang quasilinear berupa himpunan bola-bola pejal di  $\mathbb{R}^n$  yang dilengkapi operasi penjumlahan dan perkalian skalar akan dibahas sebagai perluasan dari kajian *convex bodies* berupa himpunan interval di  $\mathbb{R}$ . Hal ini didasarkan karakteristik yang sama-sama dimiliki interval dengan bola pejal yaitu memiliki pusat dan jari-jari.

Suatu ruang quasilinear dengan struktur monoid pembatalan abelian dengan operasi penjumlahan dapat membentuk struktur grup abelian dengan himpunan berupa produk kartesian dari himpunan di ruang quasilinear tersebut [3]. Penelitian mengenai ruang quasilinear berupa bola-bola pejal di  $\mathbb{R}^n$  merupakan kajian mengenai contoh ruang quasilinear dan ruang quasivektor yang terdapat di ruang Euclid dimensi  $n$ .

Ruang vektor yang memiliki norm disebut sebagai ruang bernorm. Norm merupakan suatu pemetaan yang mengaitkan suatu himpunan tak kosong dengan himpunan bilangan riil sedemikian sehingga memenuhi aksioma-aksioma tertentu [7]. Apabila diamati dari aksioma-aksioma pada definisi norm maka dapat memunculkan gagasan mengenai norm di ruang quasilinear dan ruang quasivektor. Khususnya penelitian ini mencoba memperoleh dan mengkaji suatu norm pada himpunan bola pejal di  $\mathbb{R}^n$ .

## **1.2. Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan tersebut maka skripsi yang akan disusun berorientasi pada rumusan masalah berikut.

1. Bagaimana himpunan bola pejal di  $\mathbb{R}^n$  dapat membentuk ruang quasilinear dan ruang quasivektor?
2. Bagaimana sifat-sifat ruang quasilinear dan ruang quasivektor dengan himpunan bola pejal di  $\mathbb{R}^n$ ?
3. Bagaimana norm pada ruang quasilinear dan ruang quasivektor dengan himpunan bola pejal di  $\mathbb{R}^n$ ?

## **1.3. Tujuan Penelitian**

Tujuan penelitian dari skripsi yang diajukan adalah menunjukkan dan memperoleh hasil-hasil dari himpunan bola pejal di  $\mathbb{R}^n$  yang dilengkapi operasi

penjumlahan dan perkalian skalar sehingga merupakan ruang quasilinear. Hasil-hasil yaitu mengenai himpunan unsur linear dan himpunan unsur simetris yang membentuk ruang bagian, representasi ruang dengan penjumlahan langsung, basis dan dimensi, serta norm pada ruang quasilinear tersebut.

Tujuan berikutnya adalah membentuk ruang quasivektor dari ruang quasilinear yang terbentuk. Kemudian memperoleh hasil-hasil mengenai unsur proper, rumusan baru hukum quasidistributif, ruang bagian linear dan ruang bagian simetris, teorema dekomposisi, bagian linear dan bagian simetris suatu unsur proper, pembentukan ruang vektor terasosiasi, basis dan dimensi, serta norm pada ruang quasivektor tersebut.

#### **1.4. Metode Penelitian**

Pendekatan yang akan digunakan dalam penyusunan skripsi yang diajukan adalah studi literatur, perancangan, dan simulasi. Studi literatur yaitu dengan mempelajari dan menerapkan hasil-hasil dari literatur-literatur berupa jurnal ilmiah maupun literatur berupa buku dan karya tulis ilmiah lainnya berkenaan dengan materi yang hendak dipaparkan pada skripsi yang diajukan.

Perancangan ruang quasilinear akan dilakukan dari himpunan bola pejal di  $\mathbb{R}^n$  dengan melengkapi himpunan tersebut dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar tertentu sehingga memenuhi karakteristik ruang quasilinear. Kemudian merancang ruang quasivektor dari ruang quasilinear yang telah terbentuk melalui penerapan dari literatur yang dipelajari. Selanjutnya, perancangan norm pada ruang quasilinear dan quasivektor yang telah diperoleh juga dilakukan melalui pendekatan studi literatur mengenai ruang vektor bernorm. Akhirnya, diperoleh ruang quasilinear dan ruang quasivektor yang dilengkapi norm, sehingga disebut ruang quasilinear dan quasivektor bernorm.

Diperlukan pendekatan geometris untuk merepresentasikan beberapa hasil penting yang telah diperoleh secara aljabar dalam skripsi yang diajukan. Oleh karena itu akan dilakukan simulasi menggunakan *software* penggambar grafik pada komputer untuk menampilkan hasil-hasil dari pekerjaan yang telah dilakukan secara aljabar di  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.5. Sistematika Penulisan

Skripsi ini disusun dalam lima bab. Setiap bab dapat diterangkan sebagai berikut.

### BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan merupakan bab yang berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

### BAB II LANDASAN TEORI

Landasan Teori merupakan bab yang mencakup teori-teori yang diperlukan dalam pembahasan ruang quasilinear dan quasivektor bernorm di  $\mathbb{R}^n$ . Teori-teori tersebut meliputi ruang quasilinear, ruang quasivektor, norm, dan  $\mathbb{R}^n$ . Adapun teori pendukung yaitu himpunan, relasi dan pemetaan, operasi biner, struktur aljabar, ruang vektor, dan ruang vektor bernorm.

### BAB III RUANG QUASILINEAR DAN RUANG QUASIVEKTOR BERNORM DI $\mathbb{R}^2$

Bab ini berisi pembahasan mengenai bagaimana himpunan cakram membentuk ruang quasilinear dan produk kartesiannya membentuk ruang quasivektor di  $\mathbb{R}^2$  beserta sifat-sifat yang dimilikinya. Kemudian dibahas norm yang dapat berlaku pada ruang quasilinear dan ruang quasivektor di  $\mathbb{R}^2$  tersebut.

### BAB IV RUANG QUASILINEAR DAN RUANG QUASIVEKTOR BERNORM DI $\mathbb{R}^n$

Bab ini merupakan hasil perumuman dari bab III, yaitu berisi pembahasan mengenai bagaimana himpunan bola pejal membentuk ruang quasilinear dan produk kartesiannya membentuk ruang quasivektor di  $\mathbb{R}^n$  beserta sifat-sifat yang dimilikinya. Kemudian dibahas norm yang dapat berlaku pada ruang quasilinear dan ruang quasivektor di  $\mathbb{R}^n$  tersebut.

### BAB V PENUTUP

Penutup merupakan bab yang mencakup kesimpulan dari pembahasan yang telah dipaparkan pada bab III dan IV. Saran untuk pengembangan atau kelanjutan penelitian yang dapat dilakukan dari skripsi ini juga dipaparkan pada penutup.